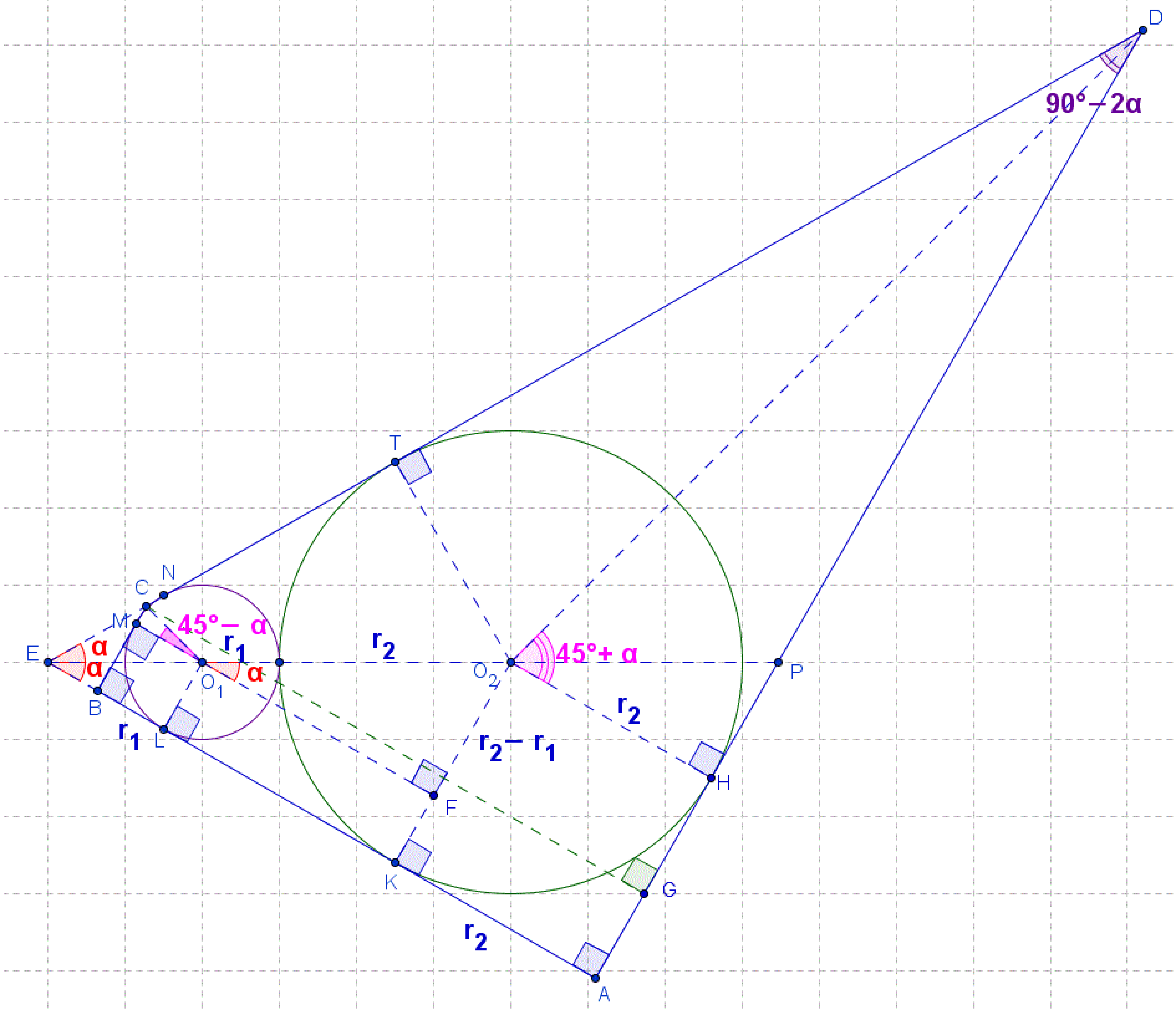
2015.06.04.

18. Дана прямоугольная трапеция с прямым углом при вершине A, в нее вписаны две окружности. Первая из них касается меньшего основания BC и боковых сторон, вторая – большее основание AD, боковые стороны и первую окружность. Прямая проходит через центры окружностей и пересекает основание AD в точке P.

а) Доказать, что $\dfrac{AP}{PD} = \sin(\angle ADC)$.

б) Радиусы окружностей $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{3}{2}$. Найти площадь трапеции.



1. Точка E – точка пересечения продолжения сторон трапеции AB и CD $\Rightarrow \Delta AED$ – прямоугольный $\Rightarrow \sin(\angle ADC) = \dfrac{AE}{ED}$.

2. Окружности вписаны в угол AED $\Rightarrow$ точки O_1, O_2, P принадлежат биссектрисе этого угла $\Rightarrow$ EP – биссектриса треугольника AED $\Rightarrow$ по основному свойству биссектрисы $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AE}{ED} = \sin(\angle ADE)$.

3. Точки K, L, M, N, T, H – точки касания окружностей со сторонами трапеции $\Rightarrow O_1L \perp AB$, $O_1M \perp BC$, $O_2K \perp AB$, $O_2H \perp AD$, $O_1M = O_1L = r_1$, $O_2K = O_2H = r_2 \Rightarrow LBMO_1$, AKO_2H – квадраты со сторонами r_1 и r_2 соответственно.

4. Проведем $O_1F \perp O_2L \Rightarrow LO_1FK$ – прямоугольник, $\angle FO_1O_2 = \angle AEP = \alpha$ (внутренний и внешний соответственные углы), $NT = LK = O_1F$.

5. $\Delta FO_1O_2 \Rightarrow NT = LK = O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2} = \sqrt{3}$, $\sin\alpha = \dfrac{O_2F}{O_1O_2} = \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$, $\angle ADE = 90° - 2\alpha = 30°$.

6. $AB = AK + KL + LB = r_2 + 2\sqrt{r_1 \cdot r_2} + r_1 = 2 + \sqrt{3}$.

7. $BC + AD = BM + MC + AH + HD = r_1 + r_1 \cdot tg(45° - \alpha) + r_2 + r_2 \cdot tg(45° + \alpha) = r_1 + r_1 \cdot tg(15°) + r_2 + r_2 \cdot tg(75°) = \dfrac{1 + (2 - \sqrt{3}) + 3 + 3 \cdot (2 + \sqrt{3})}{2} = 6 + \sqrt{3}$.

8. $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot AB = \dfrac{6 + \sqrt{3}}{2} \cdot (2 + \sqrt{3}) = \dfrac{15 + 8\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{15 + 8\sqrt{3}}{2}$.