Задача 18.

Пробник 3. Томск.

Найдите все значения параметра a, $|a| \le 1$, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{cases} ax^2 + y - 4x + a = -4, \\ ay^2 + x - 4y + a = -4. \end{cases}$$

Решение:

Если $(x_0; y_0)$ - решение системы, то $(y_0; x_0)$ - тоже будет решение системы, поэтому чтобы решение было единственным необходимо выполнение условия $x = y$.

Уравнение $ax^2 + x - 4x + a = -4$, то есть уравнение $ax^2 - 3x + a + 4 = 0$ должно иметь единственный корень.

1).Пусть $a = 0$, тогда $x = \frac{4}{3}$ - $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ единственное решение системы.

2).Пусть $a \ne 0$

$$D = 9 - 4a(a+4) = -4a^2 - 16a + 9;$$

Приравняем дискриминант к нулю. $-4a^2 - 16a + 9 = 0 [\cdot](-1)$ $\quad 4a^2 + 16a - 9 = 0;$

Решим уравнение методом переброски. Запишем вспомогательное уравнение: $a^2 + 16a - 36 = 0;$

Корни вспомогательного уравнения найдем по теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} a = -18, \\ a = 2; \end{array}\right.$

Корни $4a^2 + 16a - 9 = 0$ уравнения: $\left[\begin{array}{l} a = \frac{-18}{4} = -4{,}5, \\ a = \frac{2}{4} = 0{,}5; \end{array}\right.$

Проверим достаточное условие, учитывая что $|a| \le 1$:

При $a = \frac{1}{2}$ система уравнений примет вид: $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y - 4x + \frac{1}{2} = -4, \\ \frac{1}{2}y^2 + x - 4y + \frac{1}{2} = -4. \end{cases}$

Уравнение следствие: $\frac{1}{2}x^2 + y - 4x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 - x + 4y - \frac{1}{2} = 0$ или $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y - x + 4y - 4x = 0$

$\frac{1}{2}(x-y)(x+y)-5(x-y)=0$ $\quad\quad$ $(x-y)\left(\frac{1}{2}(x+y)-5\right)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=10-x; \end{array}\right.$$

Если $y=x$, то $x^2-6x+9=0$ или $(x-3)^2=0$ $\;x=3$, $(3;3)$ - решение системы.

Если $y=10-x$, то $x^2-10x+29=0,$ корней нет.

Значит при $a=\frac{1}{2}$ исходная система имеет единственное решение $(3;3)$.

Ответ : $a=0$, $a=\frac{1}{2}$.