ГЕОМЕТРИЯ

Важное свойство подобных фигур

Подобные между собой треугольники обладают одним очень важным свойством, которое является характерным для любых подобных фигур.

Теорема 6.9 *(основное свойство подобных треугольников).*

Отношение любых соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Это означает, что если ABC и $A_1B_1C_1$ — подобные треугольники, причём коэффициент подобия равен k (треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k), то каждой точке одного треугольника можно поставить в соответствие одну точку другого. При этом, если точке M в треугольнике ABC соответствует точка M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, а точке K треугольника ABC — точка K_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то $\dfrac{M_1K_1}{MK} = k$.

Доказательство. Пусть M — некоторая точка треугольника ABC (рис. 295). Поставим ей в соответствие точку M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы треугольник $A_1B_1M_1$ был подобен треугольнику ABM. (Соответствующими являются вершины, обозначенные одинаковыми буквами.) При этом треугольник $A_1B_1M_1$ по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$ расположен так же, как и треугольник ABM по отношению к треугольнику ABC. Понятно, что такое соответствие можно установить между всеми точками этих треугольников (например, откладывая углы от вершин A, A_1 и B, B_1). Пусть теперь точке K таким же образом поставлена в соответствие точка K_1.

Треугольник $A_1B_1M_1$ подобен треугольнику ABM с коэффициентом k. С этим же коэффициентом треугольник $A_1B_1K_1$ подобен треугольнику ABK. Из этого следует, что

$$\frac{A_1M_1}{AM} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1K_1}{AK} = k.$$

При этом $\angle MAK = \angle MAB - \angle KAB = \angle M_1A_1B_1 - \angle K_1A_1B_1 = \angle M_1A_1K_1$. Следовательно, треугольник $M_1A_1K_1$ подобен треугольнику MAK с коэффициентом k (по первому признаку подобия). Значит, $\dfrac{M_1K_1}{MK} = k$. ▼

Доказанное в последней теореме свойство лежит в основе определения подобия для произвольных фигур.

Две фигуры F и F_1 называются ***подобными****, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие (т. е. каждой точке одной фигуры соответствует*

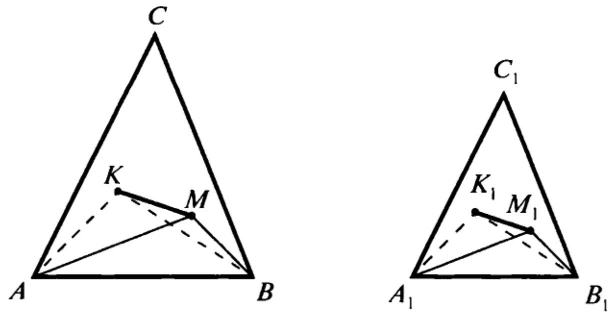

Рис. 295

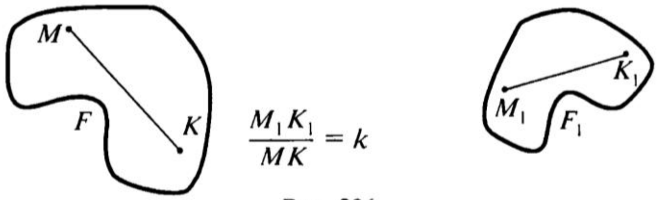

Рис. 296

одна точка другой фигуры, и наоборот), сохраняющее отношение расстояний (рис. 296).

Это значит, что если точкам M и K фигуры F соответствуют точки M_1 и K_1 фигуры F_1, то $\frac{M_1K_1}{MK} = k$, где k — постоянная величина, называемая ***коэффициентом подобия*** фигуры F_1 по отношению к фигуре F.

Понятие подобия распространяется и на пространственные объекты, тела.

Точки подобных фигур, соответствующие друг другу, называются ***соответственными***. Отрезки, концами которых являются соответственные точки, мы также будем называть ***соответственными***.

При решении некоторых задач на подобие очень часто полезным может оказаться следующий простой факт: ***отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре***. Это значит, что если отрезку a одной фигуры соответствует отрезок a_1 другой, а отрезку b соответствует отрезок b_1, то $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$. В самом деле, по определению подобных фигур $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$. Значит, $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.