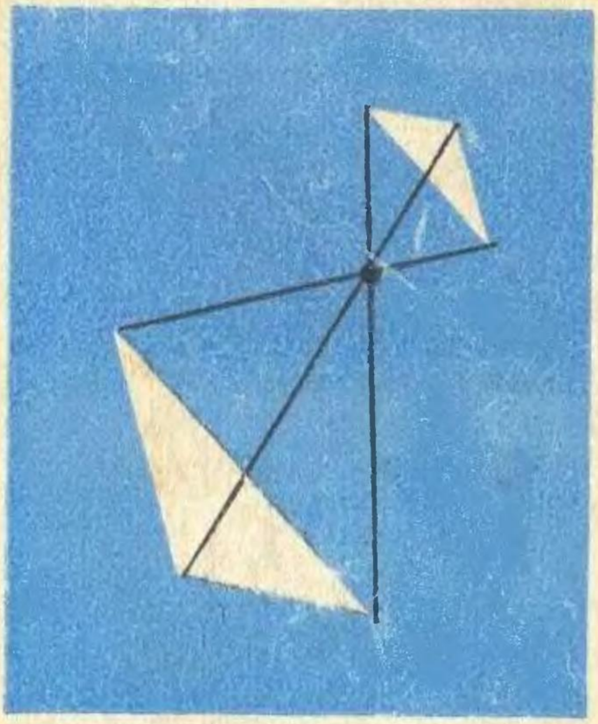
А.Н. Колмогоров
А.Ф. Семенович
Р.С. Черкасов

ГЕОМЕТРИЯ

6-8



А. Н. Колмогоров,
А. Ф. Семенович,
Р. С. Черкасов

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ 6-8 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Н. КОЛМОГОРОВА

Утверждено
Министерством просвещения СССР

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1979

65▼. Преобразования подобия

1. Вы уже знакомы с композицией перемещений (п. 54). Можно рассматривать и композиции отображений плоскости на себя, не являющихся перемещениями. Рассмотрим, например, гомотетию H_O^k и поворот R с центром A_1, переводящий точку B_1 в B_2 (рис. 394). Образами точек A, B, C, ... при гомотетии H_O^k являются соответственно точки A_1, B_1, C_1, ... Точки A_1, B_2, C_2, ...— образы точек A_1, B_1, C_1, ... при повороте R. Тогда образами точек A, B, C, ... при композиции $R \circ H_O^k$ будут соответственно точки A_1, B_2, C_2, ...

При гомотетии H_O^k расстояния между точками изменяются в отношении $|k|$. При повороте расстояния сохраняются. Значит, при композиции гомотетии H_O^k и поворота R расстояния между точками изменяются в отношении $|k|$. Однако такая композиция не является гомотетией, так как она отображает прямую AB на не параллельную ей прямую A_1B_2.

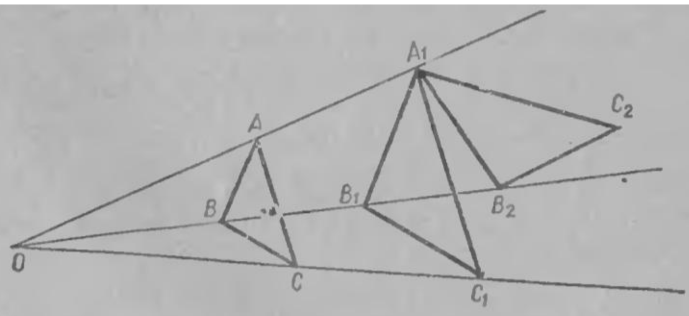


Рис. 394

Итак, существуют отображения плоскости на себя, отличные от гомотетии, при которых расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении.

Определение. Отображение плоскости на себя, при котором расстояния между любыми двумя точками изменяются в одном и том же отношении $k > 0$, называется преобразованием подобия.

Число k называется коэффициентом преобразования подобия.

Частными видами преобразований подобия являются перемещения ($k = 1$) и гомотетии (п. 63).

Этот вид преобразования подобия характеризуется тем, что любая прямая, содержащая точку и ее образ, проходит через одну и ту же точку плоскости — центр гомотетии.

Преобразование подобия отображает любую фигуру L на подобную ей фигуру L_1. В самом деле, при этом преобразовании расстояния между любыми двумя точками фигуры L изменяются в отношении k (k — коэффициент преобразования подобия).

Верно и обратное: *если фигура L_1 подобна фигуре L, то существует преобразование подобия, отображающее фигуру L на фигуру L_1.*

Поэтому можно дать другое определение подобных фигур.

Фигура L_1 подобна фигуре L, если существует преобразование подобия, отображающее фигуру L на фигуру L_1.

Рассмотрим некоторые свойства преобразований подобия.

71_1 *Преобразование подобия с коэффициентом k обратимо. Обратное отображение есть преобразование подобия с коэффициентом $\frac{1}{k}$.*

Доказательство. Пусть A и B — различные точки плоскости, A_1 и B_1 — их образы. Тогда $|A_1B_1| = k\,|AB| \neq 0$. Следовательно, $A_1 \neq B_1$ и потому преобразование подобия обратимо и, значит, имеет обратное. При обратном преобразовании точки A_1 и B_1 отображаются на точки A и B. Но $|AB| = \frac{1}{k}\,|A_1B_1|$. Значит, это обратное отображение есть преобразование подобия с коэффициентом $\frac{1}{k}$. ■

71_2 *Композиция двух преобразований подобия P_1 и P_2 с коэффициентами k_1 и k_2 есть также преобразование подобия с коэффициентом $k = k_1k_2$.*

Доказательство. При преобразовании P_1 расстояния изменяются в отношении $k_1 > 0$, а при преобразовании P_2 — в отношении $k_2 > 0$. Значит, при композиции $P_2 \circ P_1$ расстояния изменяются в отношении $k = k_1 k_2$ и, следовательно, $P_2 \circ P_1$ есть преобразование подобия с коэффициентом $k = k_1 k_2$. ■

В частности, композиция гомотетии с коэффициентом k и перемещения есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $|k|$.

Оказывается, для последнего предложения верно и обратное:

72 ***каждое преобразование подобия есть композиция гомотетии и перемещения.***

Доказательство. Пусть F — произвольное преобразование подобия с коэффициентом k. Рассмотрим композицию преобразования F и гомотетии H с коэффициентом $\frac{1}{k}$ и произвольным центром O. Тогда отображение $H \circ F$ плоскости на себя является преобразованием подобия с коэффициентом $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, т. е. $H \circ F$ есть некоторое перемещение P. Итак,

$$H \circ F = P.$$

Поскольку отображения $H \circ F$ и P совпадают, то совпадают и композиции $H' \circ (H \circ F)$ и $H' \circ P$ (H' — отображение, обратное H), т. е.

$$H' \circ (H \circ F) = H' \circ P.$$

Отсюда

$$(H' \circ H) \circ F = H' \circ P,$$
$$E \circ F = H' \circ P,$$
$$F = H' \circ P.$$

Но отображение плоскости на себя, обратное гомотетии $H^{\frac{1}{k}}$ есть гомотетия H^k.

Следовательно, $F = H^k \circ P$. Итак, произвольное преобразование подобия с коэффициентом k мы представили в виде композиции гомотетии с коэффициентом k и перемещения. Утверждение доказано. ■

Далее идет параграф "Подобные многоугольники" , первая тема в котором "Признаки подобия треугольников".