

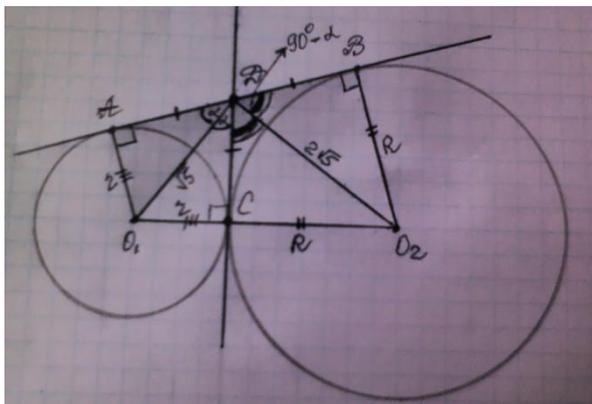
16 (С4) Без номера, с сайта А.Ларина. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C . К окружностям проведены общая внутренняя и общая внешняя касательные. Касательные пересекаются в точке D .

а) Докажите что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если $DO_1 = \sqrt{5}$; $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

Ответ: б) 1; 4.

Решение:



а) Пусть A и B – общие точки внешней касательной и заданных окружностей (см. рис.) Проведем отрезки AO_1 , BO_2 , O_1O_2 . Ясно, что O_1O_2 пройдет через точку C . Пусть радиус первой окружности r , второй R .

По свойству касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, будем иметь:

$$AD = CD = BD.$$

В прямоугольных треугольниках O_1AD и O_1CD : $(AD = CD), (AO_1 = CO_1) \Rightarrow \Delta O_1AD = \Delta O_1CD \Rightarrow (\angle ADO_1 = \angle CDO_1) \Rightarrow (DO_1 - \text{биссектриса } \angle ADC)$. Аналогично получим: $(DO_2 - \text{биссектриса } \angle BDC)$.

Пусть $\angle ADO_1 = \angle CDO_1 = \alpha$, тогда $\angle ADC = 2\alpha, \angle BDC = 180^\circ - 2\alpha$;
 $\angle CDO_2 = \angle BDC : 2 = 90^\circ - \alpha$; $\angle O_1DO_2 = \angle CDO_1 + \angle CDO_2 = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$.

б) По теореме Пифагора: $R + r = \sqrt{O_2D^2 + O_1D^2} = \sqrt{20 + 5} = 5$.

Заметим, что отрезок DC является высотой прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

По свойству средних пропорциональных отрезков:

$$O_1D^2 = (R + r)r; \quad r = \frac{O_1D^2}{R + r} = \frac{5}{5} = 1. \quad O_2D^2 = (R + r)R; \quad R = \frac{O_2D^2}{R + r} = \frac{20}{5} = 4.$$

Замечания:

1. Мои решения не являются образцами решения задач на ЕГЭ. В первую очередь **в том смысле**, что в них (решениях) много пояснений. Ученику на экзамене их, разумеется, следует довести до минимума. Можно и нужно, наверное, ограничиваться "молчаливым" решением, не забывая о необходимости минимальных пояснений.

2. Грамотность письменной речи в экзаменационных работах по математике предполагает не только соблюдение норм русского языка, но и требует точности формулировок терминов, свойств объектов (понятий, фигур и др.), а также применяемых символов.