Задача

Найти при каких значениях параметра a уравнение имеет три различных решения $\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$.

Решение:

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2+6ax+9=\left(x^2+ax+3\right)^2, (**) \\ x^2+ax+3\geq 0; \end{cases}$$

Найдем корни из первого уравнения:

$$15x^2+6ax+9=\left(x^2+ax+3\right)^2 \Leftrightarrow 15x^2+6ax+9=x^4+2x^2\left(ax+3\right)+a^2x^2+6ax+9;\Leftrightarrow$$
$$x^4+2ax^3-9x^2+a^2x^2=0;\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2ax+a^2-9\right)=0;\Leftrightarrow$$
$$x^2\left(\left(x+a\right)^2-3^2\right)=0;\Leftrightarrow x^2\left(x+a-3\right)\left(x+a+3\right)=0;$$

Получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-a+3, \\ x=-a-3; \end{array}\right.$$

Найдем при каких значениях параметра a выполняется условие $x^2+ax+3\geq 0$ в системе $(**)$.

$x^2+ax+3\geq 0;$ Для того чтобы условие было выполнено для любых x необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был $D\leq 0;\Leftrightarrow a^2-12\leq 0;\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\leq a\leq 2\sqrt{3};$

Для того чтобы корни были различны выполним проверку:

$x=-a+3\neq 0;\ a\neq 3;$
$x=-a-3\neq 0;\ a\neq -3;$ Исключим значения $a=\pm 3$ из ответа.

Ответ: $a\in\left[-2\sqrt{3};-3\right)\cup\left(-3;3\right)\cup\left(3;2\sqrt{3}\right]$.

Ответ в источнике:

$$a\in\left[-4;-3\right)\cup\left(-3;3\right)\cup\left(3;4\right]$$

Провели проверку корней. Обозначим: $f\left(x\right)=x^2+ax+3\geq 0;$

$$\begin{cases} f\left(-a+3\right)=x^2+ax+3\geq 0, \\ f\left(-a-3\right)=x^2+ax+3\geq 0; \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(-a+3\right)=\left(-a+3\right)^2+a\left(-a+3\right)+3\geq 0, \\ f\left(-a-3\right)=\left(-a-3\right)^2+a\left(-a-3\right)+3\geq 0; \end{cases}\begin{cases} a\leq 4, \\ a\geq -4. \end{cases}$$