Решения заданий из книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года.» Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю Кулабухова

Решение варианта 2

1. Стоимость билета в музей для льготной категории посетителей составляет 60% от полной стоимости билета, то есть $400 \cdot 0{,}6 = 240$ рублей. По условию надо купить 5 билетов по 400 рублей и 5 билетов по 240 рублей. Все билеты стоят $400 \cdot 5 + 240 \cdot 5 = 3200$ рублей.

Ответ: 3200.

2. Выбираем точку с ординатой 40, ближайшую к началу координат. С помощью рисунка находим соответствующую ординате точку на графике, из неё опускаем перпендикуляр на ось абсцисс и получаем точку, абсцисса которой равна 1000, это и есть наименьшее число оборотов.

Ответ: 1000.

3. Проведём BC перпендикулярно OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OBC, $\operatorname{tg}\angle BOA = \operatorname{tg}\angle BOC = \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{4}{1} = 4$ (см. рис. 1).

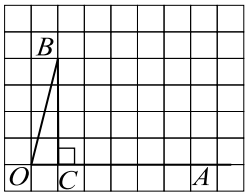


Рис. 1

Ответ: 4.

4. Пусть выбор рецепта — исход, выбор рецепта, в котором арахис является одним из ингредиентов, — благоприятный исход. Общее число исходов равно 600, благоприятных исходов 15. По определению, вероятность равна $\dfrac{15}{600} = 0{,}025$.

Ответ: 0,025.

5. $\dfrac{7}{13}x = \dfrac{84}{13}$. Умножаем обе части равенства на 13, получаем уравнение $7x = 84,\ x = \dfrac{84}{7}$, $x = 12$.

Ответ: 12.

6. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 9$ и $AD = 21$, $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$ (см. рис. 2). Проведём высоту CH. $ABCH$ — прямоугольник, $BC = AH = 9$, тогда $HD = 21 - 9 = 12$.

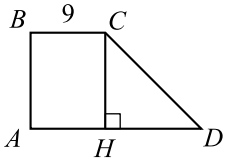


Рис. 2

Треугольник CDH прямоугольный и равнобедренный (т. к. $\angle CHD = 90°$, $\angle HCD = 45° = \angle D$). $HD = HC = 12$.

Площадь трапеции $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot CH = \dfrac{9 + 21}{2} \cdot 12 = 180$.

Ответ: 180.

7. По рисунку 3 определяем, что касательная проходит через точки $A(-6; 4)$ и $B(-2; 3)$. Известно, что значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной.

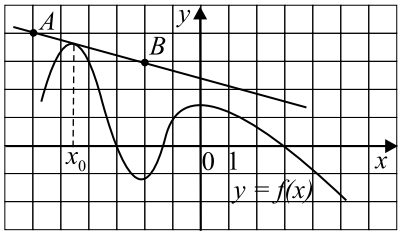


Рис. 3

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 4}{-2 - (-6)} = -\frac{1}{4} = -0{,}25.$$

Ответ: $-0{,}25$.

8. Развернём данный многогранник так, чтобы его основанием стала передняя грань (см. рис. 4). Площадь поверхности S полученного многогранника состоит из площади оснований и площади боковой поверхности. Площадь боковой поверхности равна произведению периметра указанного основания многогранника на его высоту, равную 3. Осталось заметить, что площадь одного из двух его равных оснований равна сумме площадей двух прямоугольников, имеющих измерения 4×1 и 1×2. Отсюда $S = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$, $P_{\text{осн.}}$ и h, соответственно, — площадь основания, периметр основания и высота многогранника. $S = (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \cdot 2 + (4 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1) \cdot 3 = 48$.

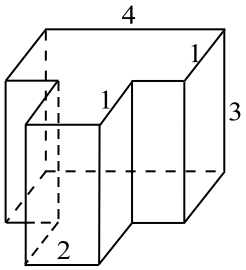


Рис. 4

Ответ: 48.

9. $\sqrt{85^2 - 84^2} = \sqrt{(85 - 84)(85 + 84)} = \sqrt{1 \cdot 169} = 13$.

Ответ: 13.

10. Выразив A из формулы $R = \dfrac{3In + Op + 2Tr}{A}$, получим

$A = \dfrac{3In + Op + 2Tr}{R}$. Так как все показатели максимальны, то $In = Op = Tr = 5$, откуда

$A = \dfrac{3 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 5}{60} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

11. Обозначим время велосипедистов до встречи через x ч. Тогда первый велосипедист до встречи проедет $18x$ км, а второй велосипедист проедет до встречи $22x$ км.

Составим и решим уравнение:

$18x + 22x = 88,\ 40x = 88,\ x = 2{,}2.$

Велосипедисты встретятся через 2,2 часа.

Ответ: 2,2.

12. Для неотрицательных t функция $\sqrt{t}$ возрастает, поэтому наибольшее значение выражения $\sqrt{t}$ будет при наибольшем значении t.

Заметим, что $-500 - 60x - x^2 = -(x^2 + 60x + 500) =$
$= -(x^2 + 2 \cdot 30x + 30^2 + (500 - 30^2)) = -(x^2 + 60x + 900) + 400 =$
$= -(x + 30)^2 + 400 \leqslant 400.$

При этом очевидно, что $-(x + 30)^2 + 400 = 400$ при $x = -30$.

Отсюда $\sqrt{-500 - 60x - x^2} \leqslant \sqrt{400} = 20$. При $x = -30$ имеем
$\sqrt{-500 - 60 \cdot (-30) - (-30)^2} = \sqrt{400} = 20.$

Таким образом, наибольшее значение функции равно 20.

Ответ: 20.

13. а) Запишем исходное уравнение в виде $2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\cos x$, получим $(\cos x)_{1,2} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 16}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4}$.

Значит, $(\cos x)_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Уравнение $(cosx)_2 = \sqrt{2}$ корней не имеет.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ с помощью числовой окружности (см. рис. 5).

Получим числа

$2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4};$

$2\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{4}.$

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}$.

14. а) 1. Построим сечение параллелепипеда плоскостью AMF (см. рис. 6).

Отрезок AF пересекает ребро DC в точке P.

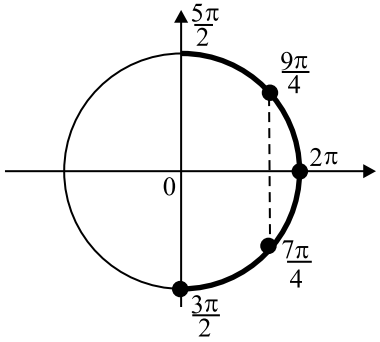


Рис. 5

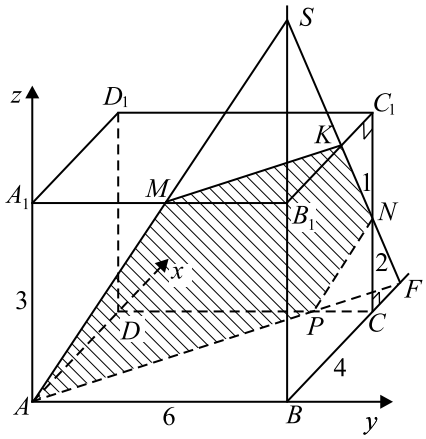


Рис. 6

В плоскости ABB_1 проведём лучи AM и BB_1, AM пересекает BB_1 в точке S. В плоскости BCC_1 проведём отрезок SF, SF пересекает B_1C_1 в точке K, а CC_1 в точке N. Пятиугольник $AMKNP$ — искомое сечение.

$AB \parallel MB_1$, $AB = 2MB_1$, значит, MB_1 — средняя линия $\triangle SBA$, отсюда $MB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = 3$. $B_1K \parallel BC$, $BB_1 = B_1S$, отсюда B_1K — средняя линия $\triangle SBF$, $B_1K = \frac{1}{2}BF = 3$, тогда $KC_1 = 1$, $CF = 2$. $\triangle FCN \sim \triangle KC_1N$ по первому признаку подобия ($\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Из подобия следует: $\frac{CN}{C_1N} = \frac{CF}{C_1K} = \frac{2}{1}$. Что и требовалось доказать.

б) 1. Введём прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 6.

2. В этой системе координат найдём координаты нужных нам точек $A(0;0;0)$, $M(0;3;3)$, $F(6;6;0)$, $B(0;6;0)$.

3. Найдём координаты двух неколлинеарных векторов, лежащих в плоскости AMF: $\overrightarrow{AM}(0;3;3)$, $\overrightarrow{AF}(6;6;0)$.

4. Обозначим через $\vec{n}(x;y;z)$ — вектор нормали к плоскости AMF, координаты которого нам нужно найти. Искомый вектор перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AF}$.

5. Получим систему уравнений $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \cdot x + 3y + 3z = 0, \\ 6 \cdot x + 6y + 0z = 0. \end{cases}$

При $x = 1$ эта система примет вид: $\begin{cases} y + z = 0, \\ 6 + 6y = 0. \end{cases}$

Её решение: $y = -1$, $z = 1$.
Имеем $\vec{n}(1; -1; 1)$.
$x - y + z + d = 0$.

С учётом того, что плоскость проходит через начало координат, $d = 0$ и уравнение примет вид: $x - y + z = 0$.

Искомое расстояние от точки $B(0; 6; 0)$ найдём по формуле $\rho = \dfrac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

15. ОДЗ: $\begin{cases} x + 0{,}5 > 0, \\ 5^{1-\sqrt{x}} - 1 \neq 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$x \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\frac{4\log_2(x + 0{,}5) - 5^{\sqrt{x}}\log_2(x + 0{,}5) \cdot (5^{1-\sqrt{x}} - 1)}{5^{1-\sqrt{x}} - 1} \leqslant 0,$$

$$\frac{\log_2(x + 0{,}5)(4 - 5^{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}})}{5^{1-\sqrt{x}} - 1} \leqslant 0.$$

$$\frac{\log_2(x + 0{,}5)(5^{\sqrt{x}} - 5^0)}{5^{1-\sqrt{x}} - 5^0} \leqslant 0.$$

Применим метод замены множителя, учитывая, что:

а) $\log_{h(x)} f(x) \longrightarrow (h(x) - 1)(f(x) - 1)$, тогда
$\log_2(x + 0{,}5) \longrightarrow (2 - 1)(x + 0{,}5 - 1) = x - 0{,}5$.

б) $h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)} \longrightarrow (h(x) - 1)(p(x) - q(x))$,
тогда $5^{\sqrt{x}} - 5^0 = (5 - 1)(\sqrt{x} - 0) = 4\sqrt{x}$,
$5^{1-\sqrt{x}} - 5^0 = (5 - 1)(1 - \sqrt{x} - 0) = 4(1 - \sqrt{x})$.

Неравенство примет вид $\dfrac{(x - 0{,}5) \cdot \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \leqslant 0$.

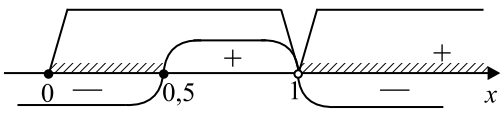


Рис. 7

На ОДЗ имеем (см. рис. 7) $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$; $x > 1$.

Ответ: $[0; 0{,}5] \cup (1; +\infty)$.

16. а) $\triangle ANO \sim \triangle BMO$ по первому признаку подобия ($\angle ANO = \angle BMO = 90°$, $\angle AON = \angle BOM$ как вертикальные). Учитывая, что в подобных треугольниках пропорциональны сходственные стороны и высоты, к ним проведённые (см. рис. 8), получим

$\frac{AO}{OB} = \frac{NF}{KM}$ (1).

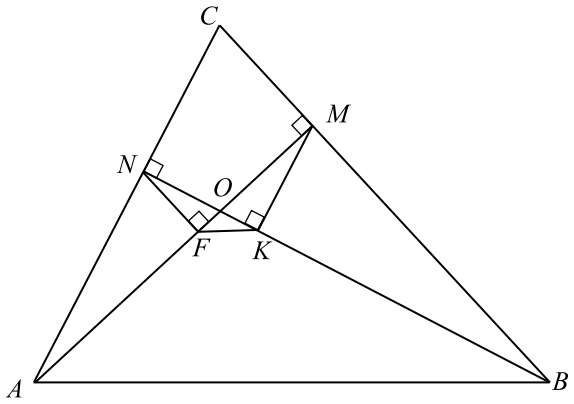


Рис. 8

$\triangle NFO \sim \triangle MKO$ по первому признаку подобия

($\angle NFO = \angle MKO = 90°$, $\angle NOF = \angle MOK$ как вертикальные), отсюда $\frac{OF}{OK} = \frac{NF}{MK}$ (2).

Из 1) и 2) следует, что $\frac{AO}{OB} = \frac{OF}{OK}$.

Следовательно, $\triangle AOB \sim \triangle FOK$ по второму признаку подобия ($\angle AOB$ — общий, $\frac{AO}{FO} = \frac{OB}{OK}$).

Из подобия следует $\angle OAB = \angle OFK$. Углы OAB и OFK соответственные при прямых AB и KF и секущей AO, следовательно, $AB \parallel KF$ по признаку параллельности прямых.

б) В четырёхугольнике $NCMO$
$\angle MON = 360° - (\angle N + \angle M + \angle C) = 120°$.

В $\triangle MOK$ $\angle MKO = 90°$, $\angle MOK = 60°$ как смежный с $\angle MON$, тогда $\angle OMK = 30°$.

Пусть $OK = x$, $OM = 2OK = 2x$.

В $\triangle OMB$ $\angle OMB = 90°$, $\angle MOB = 60°$, $\angle MBO = 30°$, $OB = 2OM = 4x$.

По доказанному в пункте а) $\triangle FOK \sim \triangle AOB$, значит, сходственные стороны пропорциональны: $\frac{KF}{AB} = \frac{OK}{OB} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

Следовательно, $KF : AB = 1 : 4$.

Ответ: $KF : AB = 1 : 4$.

17. Составим последовательность увеличения вклада.

После 1-го года — $1{,}2S$.

После 2-го года — $1{,}44S$.

После 3-го года — $(1{,}44S + 3) \cdot 1{,}2 = 1{,}728S + 3{,}6$.

После 4-го года — $(1{,}728S + 3{,}6) \cdot 1{,}2 = 2{,}0736S + 4{,}32$.

Составим неравенство:

$2{,}0736S + 4{,}32 - S - 3 > 6$,

$1{,}0736S > 4{,}68$,

$S > 4{,}4$.

Наименьшая сумма вклада составляет 5 млн рублей.

Ответ: 5.

18. $\dfrac{(x-3a)(x-a)+(x+3)(x-2)-(x+3)(x-a)}{(x+3)(x-a)} = 0$,

$\dfrac{x^2-ax-3ax+3a^2+x^2+x-6-x^2+ax-3x+3a}{(x+3)(x-a)} = 0$,

$\dfrac{x^2-x(3a+2)+3a^2+3a-6}{(x+3)(x-a)} = 0$.

$\begin{cases} x^2-x(3a+2)+3a^2+3a-6=0, \\ (x+3)(x-a)\neq 0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2-x(3a+2)+3a^2+3a-6=0$,

$x_{1,2} = \dfrac{(3a+2) \pm \sqrt{-3a^2+28}}{2}$.

1. При $D < 0$ уравнение корней не имеет.

2. При $D = 0$ $-3a^2 + 28 = 0$, $a = \pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{3a+2}{2}$ при $a = \pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Проверим условие $x \neq -3$, $x \neq a$.

$\dfrac{3a+2}{2} = -3$, $a = -\dfrac{8}{3} \neq \pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$,

$\dfrac{3a+2}{2} = a$, $a = -2 \neq \pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Значит, $a = \pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ удовлетворяет условию.

3. При $D > 0$ уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{(3a+2) \pm \sqrt{28-3a^2}}{2}$. Проверим, при каких значениях a значения $x = -3$ и $x = a$ являются корнями уравнения $x^2-x(3a+2)+3a^2+3a-6=0$.

При $x = -3$ должно выполняться равенство $9 + 3(3a+2) + 3a^2 + 3a - 6 = 0$,
$3a^2 + 12a + 9 = 0$, $a^2 + 4a + 3 = 0$, $a = -1$, $a = -3$.

При $x = a$ должно выполняться равенство $a^2 - 2a + 3a - 6 = 0$,
$a^2 + a - 6 = 0$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$.

При $a = -3$, $a = -1$ и $a = 2$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $-3; -1; \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}; 2$.

19. а) Пример последовательных четырёх ходов.

$(1; 5; 9)$; $(2, 6, 10)$; $(3, 7, 11)$; $(4, 8, 12)$.

б) Пусть сделано 6 ходов, стёрли $6 \cdot 3 = 18$ чисел, то есть стёрли все числа. Сумма чисел $1, 2, 3, \ldots, 18$ равна $\frac{1+18}{2} \cdot 18 = 171$. Каждая из сумм стираемых чисел меньше 27, значит, сумма всех стёртых за 6 ходов чисел меньше $27 \cdot 6 = 162$, $162 < 171$.

Нельзя сделать 6 ходов.

в) Пусть можно сделать 5 ходов. Тогда сумма стёртых за 5 ходов чисел не меньше $1 + 2 + 3 + \ldots + 15 = \frac{1+15}{2} \cdot 15 = 120$. С другой стороны, эта сумма не больше суммы 5 различных натуральных чисел, меньших 27, то есть $26 + 25 + 24 + 23 + 22 = 120$. Значит, можно сделать 5 ходов. Пример последовательных пяти ходов (стёрты тройки чисел): $(15, 10, 1)$; $(14, 9, 2)$; $(13, 8, 3)$; $(12, 7, 4)$, $(11; 6; 5)$.

Ответ: а) $(1; 5; 9)$; $(2, 6, 10)$; $(3, 7, 11)$; $(4, 8, 12)$; б) нет; в) 5.

Решение варианта 3

1. Стоимость авиабилета для студента составляет 50% от полной стоимости билета, то есть $7000 \cdot 0{,}5 = 3500$ рублей. По условию надо купить 4 билета по 7000 рублей и 11 билетов по 3500 рублей.

Все билеты стоят $7000 \cdot 4 + 3500 \cdot 11 = 66\,500$ рублей.

Ответ: 66 500.

2. Выбираем точку с ординатой 50, ближайшую к началу координат. С помощью рисунка находим соответствующую ординате точку на графике, из неё опускаем перпендикуляр на ось абсцисс и получаем точку, абсцисса которой равна 2000, это и есть наименьшее число оборотов.

Ответ: 2000

3. Проведём BC перпендикулярно OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OBC, $\operatorname{tg} \angle BOA = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle BOC) = -\operatorname{tg} \angle BOC = -\frac{BC}{OC} = -\frac{4}{2} = -2$ (см. рис. 9).

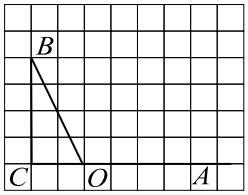


Рис. 9

Ответ: -2.

4. Общее число исходов равно 30, благоприятных исходов $30 - 18 = 12$. По определению, вероятность равна $\dfrac{12}{30} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

5. $(x+7)^3 = 3^3,\ x+7=3,\ x=3-7,\ x=-4$.

Ответ: -4.

6. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC = 10$, $AD = 90$ — основания, $AB = CD = 41$ (см. рис. 10). Проведём высоты CP и BH. $BCPH$ — прямоугольник, $BC = PH = 10$. Прямоугольные треугольники ABH и DCP равны по гипотенузе и катету ($AB = CD$, $BH = CP$), тогда $AH = PD = (90-10) : 2 = 40$.

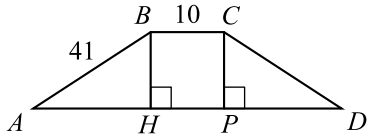


Рис. 10

Треугольник ABH прямоугольный, $BH = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$.

Площадь трапеции равна $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH = \dfrac{10+90}{2} \cdot 9 = 450$.

Ответ: 450.

7. По рисунку определяем, что касательная проходит через точки $A(1;1)$ и $B(5;4)$. Обозначим через $C(5;1)$ точку пересечения прямых $x = 5$ и $y = 1$, а через α угол BAC (на рисунке видно, что он острый). Тогда прямая AB образует с положительным направлением оси Ox угол α (см. рис. 11).

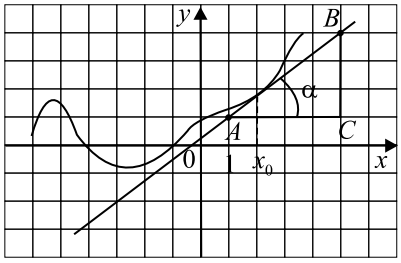


Рис. 11

Как известно, $\operatorname{tg}\alpha$ и будет значением производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

8. Развернём данный многогранник так, чтобы его основанием стала передняя грань (см. рис. 12). Площадь поверхности S полученного многогранника состоит из площади оснований и площади боковой поверхности. Площадь боковой поверхности равна произведению периметра указанного основания многогранника на его высоту, равную 1. Осталось заметить, что площадь одного из двух его равных оснований равна сумме площадей двух прямоугольников, имеющих измерения 2×1 и 1×2. Отсюда $S = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$, $P_{\text{осн.}}$ и h, со-

ответственно, — площадь основания, периметр основания и высота многогранника. $S = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \cdot 2 + (2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3) \cdot 1 = 18$.

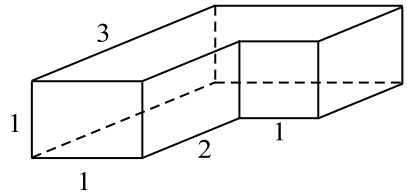


Рис. 12

Ответ: 18.

9. $(\sqrt{21} - \sqrt{5})(\sqrt{21} + \sqrt{5}) = (\sqrt{21})^2 - (\sqrt{5})^2 = 21 - 5 = 16$.

Ответ: 16.

10. Так как все показатели равны и равны рейтингу, то справедливо равенство $A = \dfrac{2R + R + 2R + R}{R}$, откуда $A = 6$.

Ответ: 6.

11. Обозначим длину поезда x км. Длина здания равна 150 метров, то есть 0,15 км. Путь, который поезд проехал мимо здания вокзала, равен $(x + 0{,}15)$ км. Время, за которое поезд проезжает мимо здания вокзала, равно $\dfrac{x + 0{,}15}{63}$ ч. По условию это 1 минута (1 мин $=$ $= \dfrac{1}{60}$ часа).

Составим и решим уравнение: $\dfrac{x + 0{,}15}{63} = \dfrac{1}{60}$, $x = 0{,}9$ (км).

Длина поезда равна 900 м.

Ответ: 900.

12. Заметим, что $x^2 - 8x + 19 = x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 + 3 =$
$= (x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2) + 3 = (x - 4)^2 + 3 \geqslant 3$.

Основание степени равно 5; $5 > 1$. Тогда $5^{x^2 - 8x + 19} \geqslant 5^3 = 125$.

При $x = 4$ имеет место равенство $5^{x^2 - 8x + 19} = 5^{(x-4)^2 + 3} = 5^3$.

Таким образом, наименьшее значение функции $y = 5^{x^2 - 8x + 19}$ равно 125.

Ответ: 125.

13. а) Преобразуем исходное уравнение и разложим на множители его левую часть.

$3^{3x} - 5 \cdot 3^{2x} - 81 \cdot 3^x + 405 = 0$,
$3^{2x}(3^x - 5) - 81(3^x - 5) = 0$,
$(3^{2x} - 81)(3^x - 5) = 0$.

Получаем: $3^{2x} - 81 = 0$ или $3^x - 5 = 0$. Значит, $3^{2x} = 81$, откуда $x = 2$ или $3^x = 5$, откуда $x = \log_3 5$.

б) Нам нужно выбрать те корни уравнения, которые принадлежат отрезку $[\log_3 6; \log_3 10]$. Заметим, что $2 = \log_3 9$. Тогда $\log_3 5 < \log_3 6 < 2 < \log_3 10$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) $2; \log_3 5$; б) 2.

14. а) Найдём положение точки P. Эта точка пересечения плоскости FKL и ребра AB, лежащего в плоскости $ABCD$ (см. рис. 13). Плоскость $ABCD$ параллельна плоскости $A_1B_1C_1D_1$, в которой лежит отрезок KF. Плоскость FKL пересекает параллельные плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым, отсюда $KF \parallel LP$. Прямоугольные треугольники KD_1F и LBP равны по катету и острому углу ($D_1F = LB = 4$ и $\angle D_1FK = \angle BLP$ как острые с соответственно параллельными сторонами).

Чтобы доказать, что четырёхугольник $FKLP$ — прямоугольник, найдём длины его сторон и диагонали.

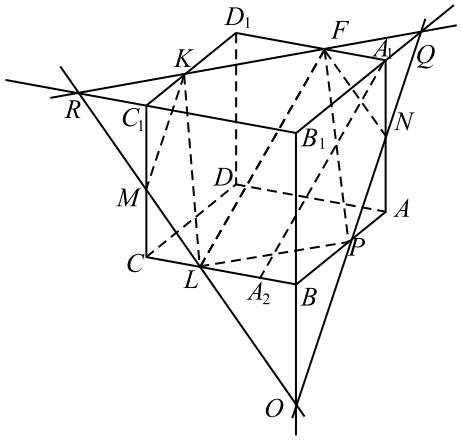


Рис. 13

$KF = PL = \sqrt{KD_1^2 + D_1F^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$,
$PF = LK = \sqrt{LC^2 + CC_1^2 + C_1K^2} = \sqrt{9+144+9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$. Противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, значит, это параллелограмм. Проведём $A_1A_2 \parallel LF$, тогда $LF = A_1A_2 = \sqrt{(LB - FA_1)^2 + AB^2 + AA_1^2} =$
$= \sqrt{(BP - C_1K)^2 + CB^2 + CC_1^2} = PK$. Диагонали параллелограмма равны, следовательно, $FKLP$ — прямоугольник.

б) Пусть Q и R — точки пересечения прямой KF и прямых B_1C_1 и A_1B_1. Проведём прямые RL и QP, они пересекут рёбра CC_1 и AA_1 в точках M и N соответственно (см. рис. 13). Тогда $RC_1 = KC_1 = CL$, поэтому можно доказать, что равны треугольники RC_1M и MCL. Прямая RL, а значит, и плоскость FKL пересекают ребро CC_1 в его середине — точке M. Аналогично плоскость FKL пересекает ребро AA_1 в его середине — точке N.

В диагональном сечении CC_1A_1A, которое является прямоугольником, отрезок MN — средняя линия. В прямоугольнике $MCAN$ противоположные стороны равны: $MN = CA = 7\sqrt{2}$.

Сечение $FKMLPN$ состоит из двух равных трапеций $MKFN$ и $MLPN$, причём мы доказали, что $LK \perp KF$ и $LK \perp LP$. Высота каждой из этих трапеций равна

$\frac{LK}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\text{сечения}} = 2S_{MKFN} = 2 \cdot \frac{KF + MN}{2} \cdot \frac{LK}{2} = (4\sqrt{2} + 7\sqrt{2}) \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = 99.$

Ответ: 99.

15. В правой части неравенства стоит 0, в левой — произведение двух множителей. Определим знаки каждого из этих множителей.

При $x = \frac{10}{7}$ выражение $7x - 10 = 0$, при $x > \frac{10}{7}$ выражение $7x - 10 > 0$, а при $x < \frac{10}{7}$ выражение $7x - 10 < 0$.

Рассмотрим выражение $\log_{4x-3}(x^2 - 4x + 9)$. Заметим, что $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 + 5 \geqslant 5$ при любых значениях x. Значит, при $4x - 3 > 1$, то есть при $x > 1$, выражение $\log_{4x-3}(x^2 - 4x + 9) > 0$; при $0 < 4x - 3 < 1$, то есть при $\frac{3}{4} < x < 1$, $\log_{4x-3}(x^2 - 4x + 9) < 0$ и не определено при $x \leqslant \frac{3}{4}$ и $x = 1$.

Удобно знаки сомножителей отметить на двух параллельных прямых (см. рис. 14).

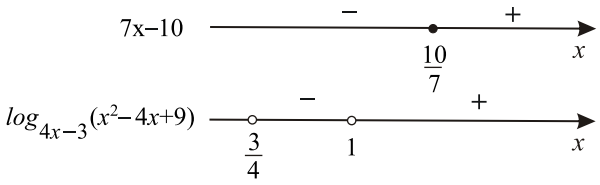


Рис. 14

Таким образом, решение исходного неравенства: $\frac{3}{4} < x < 1$; $x \geqslant \frac{10}{7}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{4}; 1\right); \left[\frac{10}{7}; +\infty\right)$.

16. а) Чтобы доказать, что точки P, M, Q и K лежат на одной окружности, можно воспользоваться одним из признаков, например доказать, что $\angle PMK = \angle PQK$. Найдём эти углы.

M — центр окружности, описанной около треугольника NPK, тогда как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle PMK = 2\angle PNK$.

Запишем сумму углов треугольника PMK и воспользуемся полученным и заданным в условии равенствами.

$\angle PMK + \angle MPK + \angle MKP = 2\angle PNK + \angle PNK = 3\angle PNK = 180°$,

$\angle PNK = 60°$; $\angle PMK = 120°$.

Q — центр вписанной в треугольник NPK окружности, поэтому Q — точка пересечения биссектрис треугольника.

$$\angle PQK = 180° - (\angle QPK + \angle QKP) = 180° - \frac{\angle NPK + \angle NKP}{2}.$$

$$\angle PQK = 180° - \frac{180° - \angle PNK}{2} = 180° - \frac{180° - 60°}{2} = 120°.$$

Значит, $\angle PMK = \angle PQK$, поэтому точки P, M, Q и K лежат на одной окружности.

б) W — точка пересечения высот треугольника NPK. Найдём угол MQW, для этого докажем сначала, что и точка W лежит на той же окружности, что и точки P, M, Q и K. Если провести высоту треугольника (например, из вершины P), то образуются прямоугольные треугольники, сумма острых углов каждого такого треугольника равна $90°$. Например, $\angle WPK + \angle PKN = 90°$, аналогично можно получить: $\angle WKP + \angle NPK = 90°$. $\angle PWK = 180° - \angle WPK - \angle WKP = 180° - (90° - \angle PKN) - (90° - \angle NPK) =$ $= \angle PKN + \angle NPK = 120°$, $\angle PMK = \angle PQK = \angle PWK$, потому точки P, M, Q, W и K лежат на одной окружности.

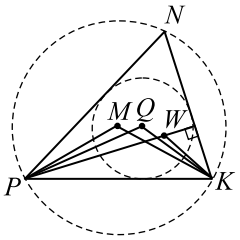


Рис. 15

Так как $\angle PNK = 60°$, $\angle NPK = 47°$, получаем: $\angle NKP = 73°$. В равнобедренном треугольнике PMK $\angle MPK = \dfrac{180° - \angle PMK}{2} = 30°$. Учитывая, что $PW \perp NK$, получаем: $\angle WPK = 90° - \angle NKP = 17°$.
Отсюда $\angle WPM = \angle MPK - \angle WPK = 13°$.

$\angle MPK = 30°$, $\angle QPK = \dfrac{\angle NPK}{2} = \dfrac{47°}{2} = 23{,}5°$,

$\angle KPW = 90° - \angle NKP = 90° - 73° = 17°$, значит, $\angle MPK > \angle QPK > \angle KPW$, поэтому лучи PW, PQ и PM пересекают дугу окружности в порядке, указанном на рисунке 15. Четырёхугольник $PMQW$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$ и $\angle MQW = 180° - \angle WPM = 180° - 13° = 167°$.

Ответ: б) $167°$.

17. Составим математическую модель задачи. Увеличение вклада на 10% означает умножение начальной суммы на 1,1.

Пусть первоначальный вклад равен P десятков тысяч рублей. Тогда в конце первого года вклад составил $1{,}1P + 3$, а в начале второго года $(1{,}1P + 3) \cdot 1{,}1$ десятков тысяч рублей. В начале третьего года — $(1{,}1P + 3) \cdot 1{,}1 + 3$, а в конце третьего года — $((1{,}1P + 3) \cdot 1{,}1 + 3) \cdot 1{,}1$ десятков тысяч рублей.

По условию нужно найти наибольшее целое число P такое, чтобы через три года вклад был меньше 9,6 десятков тысяч рублей, то есть было выполнено неравенство $((1{,}1P + 3) \cdot 1{,}1 + 3) \cdot 1{,}1 < 9{,}6$.

Решим это неравенство и найдём наибольшее целое решение этого неравенства.
$(1{,}1^2P + 3 \cdot 1{,}1 + 3) \cdot 1{,}1 < 9{,}6$;
$1{,}1^3P + 3 \cdot 1{,}1^2 + 3 \cdot 1{,}1 < 9{,}6$;
$1{,}1^3P < 2{,}67$;

$P < \frac{2{,}67}{1{,}331}$, $P < \frac{2670}{1331}$, $P < 2\frac{8}{1331}$.

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 2. Значит, размер первоначального вклада составляет 20 000 рублей.

Ответ: 20 000.

18. Решим задачу графически. Построим графики первого и второго уравнения и определим, сколько точек пересечения они имеют при различных значениях параметра.

Первое уравнение $\frac{xy^2 - 5xy - 5y + 25}{\sqrt{x+5}} = 0$ параметра не содержит и представляет собой равенство дроби нулю. Это выполняется, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, при этом оба выражения имеют смысл.

Запишем уравнение в виде $\frac{(y-5)(xy-5)}{\sqrt{x+5}} = 0$, разложив числитель на множители.

При $x \leqslant -5$ левая часть не имеет смысла. При $x > -5$ уравнение задаёт прямую $y = 5$ и гиперболу $y = \frac{5}{x}$ (см. рис. 16).

Найдём координаты точек A, B и C. B — точка пересечения прямой $y = 5$ и гиперболы $y = \frac{5}{x}$, чтобы найти её координаты, нужно решить систему уравнений $\begin{cases} y = 5, \\ y = \frac{5}{x}. \end{cases}$

Получаем $B(1; 5)$.

У точек A и C абсцисса равна -5, ординаты находим из уравнений прямой и гиперболы. $A(-5; 5)$ и $C(-5; -1)$.

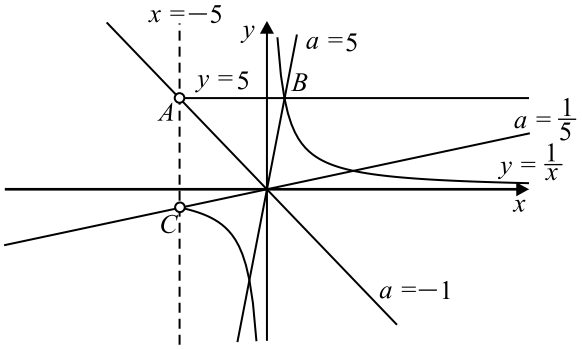


Рис. 16

При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат. Чтобы найти значение a, при котором такая прямая проходит через точку с указанными координатами, нужно подставить координаты в уравнение прямой.

Например, для точки $A(-5; 5)$ получаем $x = -5$, $y = 5$, $5 = a \cdot (-5)$, $a = -1$. Аналогично для $B(1; 5)$ $a = 5$ и для $C(-5; -1)$ $a = \frac{1}{5}$.

При $x > -5$ прямая $y = ax$ пересекает прямую $y = 5$ при $a < -1$ и $a > 0$, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{5}{x}$ при $a > 0$, пересекает левую ветвь гиперболы $y = \frac{5}{x}$ при $a > \frac{1}{5}$. При этом прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения прямой $y = 5$ и гиперболы $y = \frac{5}{x}$ при $a = 5$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 5$ и гиперболы $y = \frac{5}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $x > -5$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0 < a \leqslant 0{,}2$; $a = 5$.

Ответ: $(0; 0{,}2]; \{5\}$.

19. а) Разобьём множество $\{500; 501; 502; \ldots; 599\}$ на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 1099: $\{500; 599\}$, $\{501; 598\}$, … .

Множество $\{500; 501; 502; \ldots; 599\}$ можно разбить на два подмножества, в каждом из которых по 25 таких пар. Значит, сумма в этих двух подмножествах одинакова и множество $\{500; 501; 502; \ldots 599\}$ является красивым.

б) Заметим, что $5^{100} > \frac{5^{100} - 1}{4} = 5^{99} + 5^{98} + \ldots + 25 + 5 + 1$. Поэтому сумма чисел в подмножестве множества $\{5; 25; 125; \ldots; 5^{100}\}$, содержащем 5^{100}, всегда больше суммы остальных чисел, следовательно, множество $\{5; 25; 125; \ldots; 5^{100}\}$ не является красивым.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является красивым в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Подмножества множества $\{1; 3; 5; 6; 7; 9; 14\}$, удовлетворяющие первому случаю, — это $\{1; 3; 5; 9\}$, $\{3; 5; 6; 14\}$, $\{1; 6; 7; 14\}$.

Рассмотрим второй случай. Заметим, что сумма всех чисел красивого подмножества чётна. В исходном множестве всего два чётных числа, поэтому числа 6 и 14 либо одновременно входят в красивое четырёхэлементное подмножество, либо одновременно не входят в него. Если 6 и 14 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 20, что невозможно, так как сумма самых больших оставшихся чисел $7 + 9 < 20$, либо разность двух других чисел равна 8.

Получаем красивое подмножество: $\{1; 6; 9; 14\}$.

Если 6 и 14 не входят в подмножество, то красивое подмножество лежит во множестве $\{1; 3; 5; 7; 9\}$. Получаем красивые подмножества (две пары чисел с равными суммами): $\{1; 3; 5; 7\}$,$\{1; 3; 7; 9\}$, $\{3; 5; 7; 9\}$. Всего получилось 7 красивых подмножеств.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Решение варианта 4

1. Стоимость авиабилета для студента составляет 50% от полной стоимости билета, то есть $5000 \cdot 0{,}5 = 2500$ рублей. По условию надо купить 5 билетов по 5000 рублей и 12 билетов по 2500 рублей.

Все билеты стоят $5000 \cdot 5 + 2500 \cdot 12 = 55\,000$ рублей.

Ответ: 55 000.

2. Выбираем точку с ординатой 75, ближайшую к началу координат. С помощью рисунка находим соответствующую ординате точку на графике, из неё опускаем перпендикуляр на ось абсцисс и получаем точку, абсцисса которой равна 3000, это и есть наименьшее число оборотов двигателя.

Ответ: 3000.

3. Проведём BC перпендикулярно OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OBC, $\operatorname{tg}\angle BOA = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle BOC) = -\operatorname{tg}\angle BOC = -\dfrac{BC}{OC} = -\dfrac{3}{3} = -1$ (см. рис. 17).

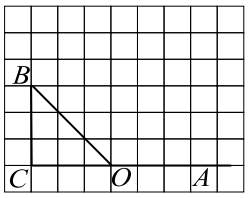


Рис. 17

Ответ: -1.

4. Общее число исходов равно 500, неблагоприятных исходов 35. По определению, вероятность события, противоположного искомому («в рецепте будет молоко»), равна $\dfrac{35}{500} = 0{,}07$. Вероятность события «в рецепте не будет молока» равна $1 - 0{,}07 = 0{,}93$.

Ответ: 0,93.

5. $(x-17)^3 = (-2)^3,\ x - 17 = -2,\ x = 17 - 2,\ x = 15.$

Ответ: 15.

6. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC = 20$, $AD = 50$ — основания, $AB = CD = 17$ (см. рис. 18). Проведём высоты CP и BH. $BCPH$ — прямоугольник, $BC = PH = 20$. Прямоугольные треугольники ABH и DCP равны по гипотенузе и катету ($AB = CD$, $BH = CP$), и тогда $AH = PD = (50 - 20) : 2 = 15$.

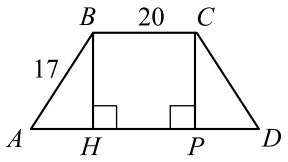


Рис. 18

Треугольник ABH прямоугольный, $BH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.

Площадь трапеции равна $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH = \dfrac{20 + 50}{2} \cdot 8 = 280.$

Ответ: 280.

7. По рисунку определяем, что касательная проходит через точки $A(-6;2)$ и $B(-1;1)$. Обозначим через $C(-6;1)$ точку пересечения прямых $x = -6$ и $y = 1$, а через α угол ABC (на рисунке видно, что он острый). Тогда прямая AB образует с положительным направлением оси Ox угол $\pi - \alpha$, который является тупым (см. рис. 19).

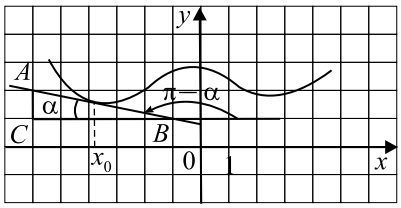


Рис. 19

Как известно, $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ и будет значением производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{2-1}{-1-(-6)} = \dfrac{1}{5}$. Отсюда по формулам приведения получаем: $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2$.

Ответ: $-0{,}2$.

8. Из данного многогранника можно построить прямоугольный параллелепипед с измерениями $3 \times 5 \times 4$. Для этого передвигаем лицевую, правую и нижнюю грани выреза соответственно на 2 единицы к передней грани, на 1 единицу влево и на 2 единицы вверх. Площадь поверхности S полученного прямоугольного параллелепипеда и данного в условии многогранника совпадают. Поэтому $S = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$, $P_{\text{осн.}}$ и h, соответственно, — площадь основания, периметр основания и высота параллелепипеда. Отсюда $S = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot (3+5) \cdot 4 = 94$.

Ответ: 94.

9. $(\sqrt{17} - \sqrt{7})(\sqrt{17} + \sqrt{7}) = (\sqrt{17})^2 - (\sqrt{7})^2 = 17 - 7 = 10$.

Ответ: 10.

10. Так как все показатели равны и равны рейтингу, то справедливо равенство $A = \dfrac{3R + R + 4R + R}{R}$, откуда $A = 9$.

Ответ: 9.

11. Обозначим длину поезда x км. Тогда время, за которое поезд проезжает мимо семафора, равно $\dfrac{x}{60}$ ч. По условию это 45 секунд, то есть $\dfrac{45}{3600}$ ч.

$\dfrac{x}{60} = \dfrac{45}{3600}$, $x = \dfrac{60 \cdot 45}{3600}$, $x = 0{,}75$ (км). Длина поезда равна 750 м.

Ответ: 750.

12. Заметим, что $-23 - 10x - x^2 = -(x^2 + 10x + 23) = -(x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 - 2) =$
$= -(x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2) + 2 = -(x+5)^2 + 2 \leqslant 2$.

Основание степени равно 4; $4 > 1$. Тогда $4^{-23-10x-x^2} \leqslant 4^2$.

При $x = -5$ имеет место равенство $4^{-23-10\cdot(-5)-(-5)^2} =$
$= 4^{-(-5+5)^2+2} = 4^2 = 16$.

Таким образом, наибольшее значение функции $y = 4^{-23-10x-x^2}$ равно 16.

Ответ: 16.

13. а) Преобразуем исходное уравнение и разложим на множители его левую часть.

$5^{3x} - 3 \cdot 5^{2x} - 25 \cdot 5^x + 25 \cdot 3 = 0,$

$5^{2x}(5^x - 3) - 25(5^x - 3) = 0,$

$(5^x - 3)(5^{2x} - 25) = 0.$

Получаем: $5^x - 3 = 0$ или $5^{2x} - 25 = 0$. $5^x - 3 = 0$, $x = \log_5 3$ или $5^{2x} = 25$, $x = 1$.

б) Нам нужно выбрать те корни уравнения, которые принадлежат отрезку $[\log_5 4; \log_5 11]$. Заметим, что $\log_5 3 < \log_5 4 < 1 < \log_5 11$, значит, указанному отрезку принадлежит корень $x = 1$.

Ответ: а) $1; \log_5 3$; б) 1.

14. а) Найдём положение точки C. Эта точка пересечения плоскости XYZ и ребра PN, лежащего в плоскости $MNPQ$ (см. рис. 20). Плоскость $MNPQ$ параллельна плоскости $M_1N_1P_1Q_1$, в которой лежит отрезок XY. Плоскость XYZ пересекает параллельные плоскости $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ по параллельным прямым, отсюда $XY \parallel ZC$. Прямоугольные треугольники YXM_1 и ZCP равны по катету и острому углу ($M_1Y = PZ = 6$ и $\angle M_1YX = \angle PZC$ как острые с соответственно параллельными сторонами).

Чтобы доказать, что четырёхугольник $XYCZ$ — прямоугольник, найдём длины его сторон и диагонали.

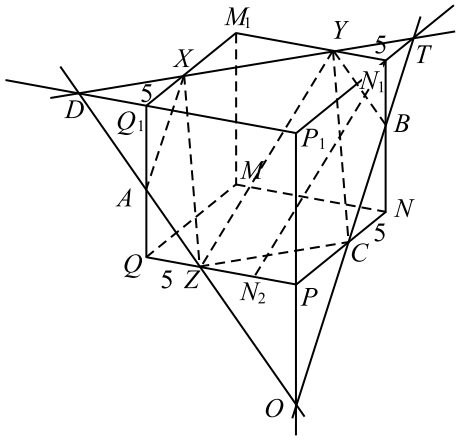


Рис. 20

$XY = ZC = \sqrt{XM_1^2 + M_1Y^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2},$

$CY = XZ = \sqrt{ZQ^2 + QQ_1^2 + Q_1X^2} = \sqrt{25 + 225 + 25} = \sqrt{275} = 5\sqrt{11}$. Противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, значит, это параллелограмм. Проведём $N_1N_2 \parallel YZ$, тогда

$ZY = N_1N_2 = \sqrt{(ZP - YN_1)^2 + PN^2 + NN_1^2} =$

$= \sqrt{(PC - Q_1X)^2 + PQ^2 + QQ_1^2} = CX.$

Диагонали параллелограмма равны, следовательно, $FKLP$ — прямоугольник.

б) Пусть D и T — точки пересечения прямой XY и прямых Q_1P_1 и P_1N_1. Проведём прямые DZ и TC, они пересекут рёбра QQ_1 и NN_1 в точках A и B соответственно (см. рис. 20). D — точка пересечения прямых XY и AZ. Тогда $DQ_1 = Q_1X = QZ$. Легко доказать, что треугольники DQ_1A и ZQA равны и $AQ = AQ_1$. Поэтому прямая DZ, а

значит, и плоскость XYZ пересекают ребро QQ_1 в его середине — точке A. Аналогично плоскость XYZ пересекает ребро NN_1 в его середине — точке B.

В диагональном сечении QQ_1N_1N, которое является прямоугольником, отрезок AB — средняя линия. В прямоугольнике $QABN$ противоположные стороны равны: $AB = QN = 11\sqrt{2}$.

Сечение $XYBCZA$ состоит из двух равных трапеций $AXYB$ и $AZCB$, причём мы доказали, что $ZX \perp XY$ и $ZX \perp ZC$. Высота каждой из этих трапеций равна $\dfrac{ZX}{2} = \dfrac{5\sqrt{11}}{2}$.

$$S_{\text{сечения}} = 2S_{AXYB} = 2 \cdot \frac{AB + XY}{2} \cdot \frac{XZ}{2} = (11\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \cdot \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{85\sqrt{22}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{85\sqrt{22}}{2}$.

15. В правой части неравенства стоит 0, в левой — произведение двух множителей. Определим знаки каждого из этих множителей.

При $x = \dfrac{7}{3}$ выражение $3x - 7 = 0$, при $x > \dfrac{7}{3}$ выражение $3x - 7 > 0$, а при $x < \dfrac{7}{3}$ выражение $3x - 7 < 0$.

Рассмотрим выражение $\log_{5x-11}(x^2 - 8x + 17)$ и определим его знаки. Заметим, что $x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1 \geqslant 1$ при любых значениях x. Значит, при $5x - 11 > 1$, то есть при $x > 2{,}4$, выражение $\log_{5x-11}(x^2 - 8x + 17) > 0$; при $0 < 5x - 11 < 1$, то есть при $2{,}2 < x < 2{,}4$, $\log_{5x-11}(x^2 - 8x + 17) < 0$ и не определено при $x \leqslant 2{,}2$ и $x = 2{,}4$.

Удобно знаки сомножителей отметить на двух параллельных прямых (см. рис. 21).

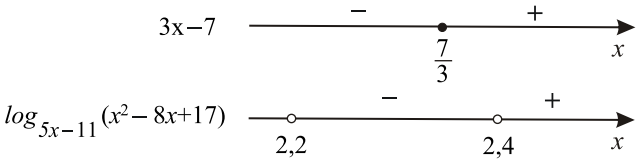


Рис. 21

Таким образом, решение исходного неравенства: $\dfrac{11}{5} < x \leqslant \dfrac{7}{3}$; $x > 2{,}4$.

Ответ: $\left(2{,}2;\, 2\dfrac{1}{3}\right]$; $(2{,}4;\, +\infty)$.

16. а) Чтобы доказать, что точки N, P, K и Q лежат на одной окружности, можно воспользоваться одним из признаков, например доказать, что $\angle NPQ = \angle NKQ$. Найдём эти углы.

P — центр окружности, описанной около треугольника MNQ, тогда как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle NPQ = 2\angle NMQ$.

Запишем сумму углов треугольника NPQ и воспользуемся полученным и заданным в условии равенствами.

$\angle NPQ + \angle PNQ + \angle PQN = 2\angle NMQ + \angle NMQ = 3\angle NMQ = 180^\circ$,
$\angle NMQ = 180^\circ : 3 = 60^\circ$; $\angle NPQ = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

K — центр вписанной в треугольник MNQ окружности, поэтому K — точка пересечения биссектрис треугольника.

$\angle NKQ = 180^\circ - (\angle KNQ + \angle KQN) = 180^\circ - \dfrac{\angle MNQ + \angle MQN}{2}$.

$\angle NKQ = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - \angle NMQ}{2} = 120^\circ$.

Значит, $\angle NPQ = \angle NKQ$, поэтому точки N, P, K и Q лежат на одной окружности.

б) O — точка пересечения высот треугольника NMQ. Найдём угол PKO, для этого докажем сначала, что и точка O лежит на той же окружности, что и точки N, P, K и Q. Если провести высоту треугольника (например, из вершины N), то образуются прямоугольные треугольники, сумма острых углов каждого такого треугольника равна 90°. Например, $\angle ONQ + \angle MQN = 90^\circ$, аналогично можно получить: $\angle OQN + \angle MNQ = 90^\circ$. $\angle NOQ = 180^\circ - \angle ONQ - \angle OQN = 180^\circ - (90^\circ - \angle MQN) -$
$- (90^\circ - \angle MNQ) = \angle MQN + \angle MNQ = 180^\circ - \angle NMQ = 120^\circ$.

Значит, $\angle NPQ = \angle NKQ = \angle NOQ$, потому точки N, P, K, O и Q лежат на одной окружности.

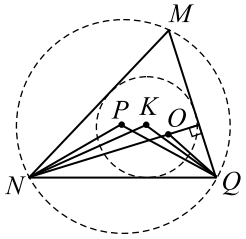


Рис. 22

$\angle NMQ = 60^\circ$, $\angle MNQ = 42^\circ$, получаем:
$\angle MQN = 180^\circ - 60^\circ - 42^\circ = 78^\circ$. В равнобедренном треугольнике NPQ имеем $\angle PNQ = \dfrac{180^\circ - \angle NPQ}{2} = 30^\circ$. Учитывая, что $NO \perp MQ$, получаем: $\angle ONQ = 90^\circ - \angle MQN = 12^\circ$.

Отсюда $\angle ONP = \angle PNQ - \angle ONQ = 30^\circ - 12^\circ = 18^\circ$. Имеем: $\angle PNQ = 30^\circ$, $\angle KNQ = \dfrac{\angle MNQ}{2} = \dfrac{42^\circ}{2} = 21^\circ$, $\angle ONQ = 90^\circ - \angle MQN = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$, значит, $\angle PNQ > \angle KNQ > ONQ$, поэтому лучи NO, NK и NP пересекают дугу окружности в порядке, указанном на рисунке 22. Четырёхугольник $NPKO$ вписан в окружность, поэтому $\angle PKO = 180^\circ - \angle ONP = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

Ответ: б) 162°.

17. Составим математическую модель задачи. Увеличение вклада на 20% означает умножение начальной суммы на 1,2.

Пусть первоначальный вклад равен P сотен тысяч рублей. Тогда в конце первого года вклад составил $1{,}2P$, а в конце второго года — $1{,}2^2P$, в начале третьего года — $1{,}2^3P$. В начале четвёртого года — $1{,}2^3P + 1$, а в конце — $(1{,}2^3P + 1) \cdot 1{,}2$. В начале пятого года — $(1{,}2^3P + 1) \cdot 1{,}2 + 1$, а в конце — $((1{,}2^3P + 1) \cdot 1{,}2 + 1) \cdot 1{,}2$.

По условию нужно найти наибольшее целое число P, при котором выполнено неравенство $((1{,}2^3P + 1) \cdot 1{,}2 + 1) \cdot 1{,}2 < 8$.

Выполнив преобразования, получим: $3888P < 8375,\ P < \dfrac{8375}{3888},\ P < 2\dfrac{599}{3888}$.

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 2. Значит, размер первоначального вклада составляет 200 000 рублей.

Ответ: 200 000 рублей.

18. Решим задачу графически. Построим графики первого и второго уравнения и определим, сколько точек пересечения они имеют при различных значениях параметра.

Первое уравнение $\dfrac{xy^2 - 7xy - 7y + 49}{\sqrt{x+7}} = 0$ параметра не содержит и представляет собой равенство дроби нулю. Это выполняется, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, при этом оба выражения имеют смысл.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{(y-7)(xy-7)}{\sqrt{x+7}} = 0$, разложив числитель на множители.

При $x \leqslant -7$ левая часть не имеет смысла. При $x > -7$ уравнение задаёт прямую $y = 7$ и гиперболу $y = \dfrac{7}{x}$ (см. рис. 23).

Найдём координаты точек A, B и C. B — точка пересечения прямой $y = 7$ и гиперболы $y = \dfrac{7}{x}$, чтобы найти её координаты, нужно решить систему уравнений $\begin{cases} y = 7, \\ y = \dfrac{7}{x}. \end{cases}$

Получаем $B(1; 7)$.

У точек A и C абсцисса равна -7, ординаты находим из уравнений прямой и гиперболы. $A(-7; 7)$ и $C(-7; -1)$.

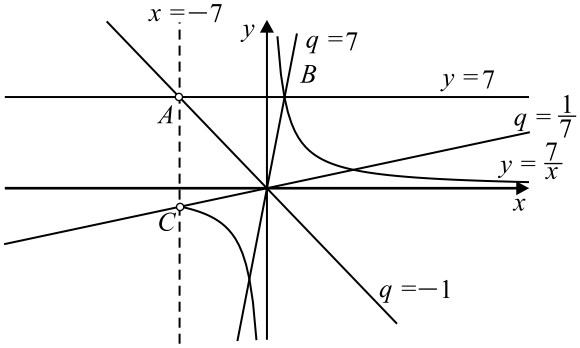


Рис. 23

При каждом значении q уравнение $y = qx$ задаёт прямую с угловым коэффициентом q, проходящую через начало координат. При $x > -7$ такая прямая пересекает прямую $y = 7$ при $q < -1$ и $q > 0$, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \dfrac{7}{x}$ при $q > 0$, пересекает левую ветвь гиперболы $y = \dfrac{7}{x}$ при $q > \dfrac{1}{7}$. При этом прямая $y = qx$ проходит через точку пересечения прямой $y = \dfrac{7}{x}$ и гиперболы $y = \dfrac{7}{x}$ при $q = 7$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 7$ и гиперболы $y = \dfrac{7}{x}$ с прямой $y = qx$ при условии $x > -7$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0 < q \leqslant \dfrac{1}{7}$; $q = 7$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{7}\right], \{7\}$.

19. а) Разобьём множество $\{300; 301; 302; \ldots 399\}$ на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 699: $\{300; 399\}$, $\{301; 398\}$, … .

Множество $\{300; 301; 302; \ldots 399\}$ можно разбить на два подмножества, в каждом из которых по 25 таких пар. Значит, сумма в этих двух подмножествах одинакова и множество $\{300; 301; 302; \ldots 399\}$ является отличным.

б) Заметим, что $3^{100} > \dfrac{3^{100} - 1}{2} = 3^{99} + 3^{98} + \ldots + 9 + 3 + 1$. Поэтому сумма чисел в подмножестве множества $\{3; 9; 27; \ldots 3^{100}\}$, содержащем 3^{100}, всегда больше суммы остальных чисел, следовательно, множество $\{3; 9; 27; \ldots 3^{100}\}$ не является отличным.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является отличным в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Подмножества множества $\{1; 4; 5; 7; 8; 10; 17\}$, удовлетворяющие первому случаю, — это $\{1; 4; 5; 10\}$, $\{4; 5; 8; 17\}$.

Рассмотрим второй случай. Заметим, что сумма всех чисел отличного подмножества чётна. В исходном множестве три чётных (4, 8, 10) и четыре нечётных (1, 5, 7, 17) числа. Возможны случаи: чётное + чётное (Ч + Ч) = нечётное + нечётное (Н + Н), Н + Н = = Н + Н, и Ч + Н = Ч + Н.

1) Ч + Ч = Н + Н. Переберём суммы чётных чисел.
$4 + 8 = 5 + 7, \{4; 5; 7; 8\}$;
$10 + 8 = 1 + 17, \{1; 8; 10; 17\}$;
$4 + 10 = ?$ — Нет подходящих решений.

2) Н + Н = Н + Н.
$17 + 1 > 5 + 7$. — Нет подходящих решений.

3) Ч + Н = Ч + Н. Разность чётных чисел равна разности нечётных.
$4 + 5 = 8 + 1, \{1; 4; 5; 8\}$;
$4 + 7 = 10 + 1, \{1; 4; 7; 10\}$;
$8 + 7 = 10 + 5, \{5; 7; 8; 10\}$.

Всего получилось 7 отличных подмножеств.
Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Решение варианта 6

1. Покупатель заплатит $100\% - 5\% = 95\%$ стоимости покупки, что составит $900 \cdot 0{,}95 = 855$ рублей.

Ответ: 855.

2. На оси ординат находим промежуток от 30 до 70 °C. Ему соответствует на оси абсцисс промежуток от 1до 7 минут. То есть двигатель нагревается шесть минут.

Ответ: 6.

3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (см. рис. 24). $AC = 10$, $BD = 6$, следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 30$.

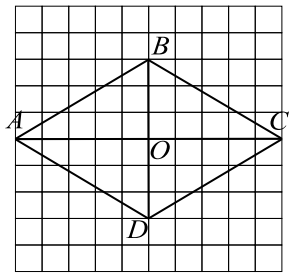


Рис. 24

Ответ: 30.

4. Можно считать, что общее число исходов равно 300 (то есть 300 швейных машинок), благоприятных исходов $300 - 26 = 274$ (исходов, соответствующих машинкам без дефектов). По определению, вероятность события равна $\frac{274}{300} = 0{,}913\ldots \approx 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

5. $x^2 + 23x + 60 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 60}}{2}$, $x_1 = -3$, $x_2 = -20$. Меньший из корней равен -20.

Ответ: -20.

6. Угол CBD является внешним углом треугольника ABC и равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Найдём угол CBD.
$\angle CBD = \angle A + \angle C = 65^\circ + 53^\circ = 118^\circ$. Треугольник BCD равнобедренный, его углы при основании равны: $\angle D = \angle DCB$. Сумма углов треугольника равна 180°. Тогда $\angle D = (180^\circ - 118^\circ) : 2 = 31^\circ$.

Ответ: 31.

7. Согласно физическому смыслу производной необходимо найти $x'(5)$.
$x'(t) = -4t^3 + 21t^2 + 6$. $x'(5) = -4 \cdot 5^3 + 21 \cdot 5^2 + 6 = -500 + 525 + 6 = 31$.

Ответ: 31.

8. Рассмотрим рисунок, указанный в условии. Диаметр основания цилиндра является диагональю AC квадрата $ABCD$, а радиус R основания цилиндра равен половине AC. Согласно теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$.

$R = 3 \cdot \sqrt{2}$. Заметим, что высота цилиндра совпадает с высотой призмы h. Отсюда следует, что $V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \dfrac{6}{\pi} = 18 \cdot 6 = 108$.

Ответ: 108.

9. $4^{0,12} \cdot (4^2)^{0,44} = 4^{0,12} \cdot 4^{0,88} = 4^{0,12+0,88} = 4^1 = 4$.

Ответ: 4.

10. Решим неравенство $p \leqslant 400$, учитывая, что $s > 0$.

$\dfrac{mg}{2ls} \leqslant 400$, $\dfrac{2240 \cdot 10}{2 \cdot 14 \cdot s} \leqslant 400$, $\dfrac{80 \cdot 10}{s} \leqslant 400$, $\dfrac{2}{s} \leqslant 1$, $s \geqslant 2$.

Наименьшая возможная ширина опорных балок равна 2 метрам.

Ответ: 2.

11. Обозначим скорость второго мотоциклиста через x км/ч, тогда за 30 минут (0,5 часа) он проедет расстояние, равное $0{,}5x$ км. Первый мотоцикл проедет за это время $0{,}5 \cdot 72 = 36$ (км). Разность между расстояниями, которые проехали мотоциклы за 0,5 часа, и есть круг трассы, то есть 10 км.

Составим и решим уравнение: $36 - 0{,}5x = 10,\ 0{,}5x = 26,\ x = 52$.

Скорость второго мотоциклиста 52 км/ч.

Ответ: 52.

12. Найдём производную исходной функции: $y'(x) = 6x^2 + 72x + 162$.

Найдём нули производной из уравнения $y'(x) = 0$; $6x^2+72x+162 = 0$; $x^2+12x+27 = 0$, $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{6^2 - 1 \cdot 27} = -6 \pm 3$. Отсюда $x_1 = -9$, $x_2 = -3$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 25). Из рисунка видно, что значение $x = -3$ является единственной точкой минимума.

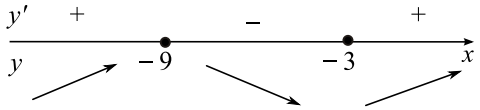


Рис. 25

Ответ: -3.

13. а) Решим уравнение $6\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 3 = 0$. Обозначим $\log_2(2\cos x) = t$ и решим получившееся квадратное уравнение.

$6t^2 - 9t + 3 = 0$, $t = \dfrac{9 \pm 3}{12}$; $t_1 = \dfrac{1}{2}$; $t_2 = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(2\cos x) = \dfrac{1}{2}, \\ \log_2(2\cos x) = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2\cos x = \sqrt{2}, \\ 2\cos x = 2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, найдём с помощью числовой окружности:

$x_1 = -\dfrac{\pi}{4}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \dfrac{\pi}{4}$ (см. рис. 26).

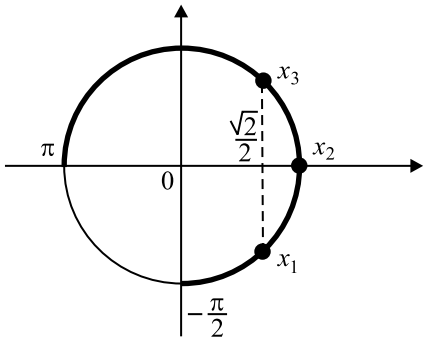


Рис. 26

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi k,\ k\in Z;$ б) $-\frac{\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4}$.

14. а) Чтобы доказать, что плоскости FEP и NKB параллельны, достаточно показать, что две пересекающиеся прямые PF и FE плоскости FEP соответственно параллельны двум пересекающимся прямым BN и NK плоскости BNK (см. рис. 27). Покажем это.

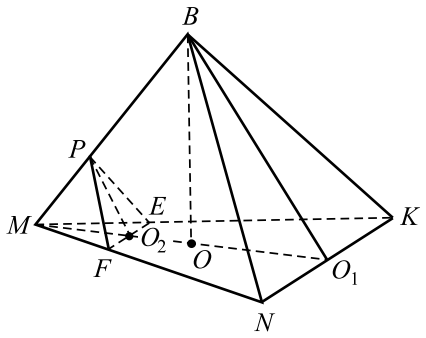


Рис. 27

Найдём боковое ребро MB из треугольника MBO:

$$MO=\frac{2}{3}MO_1=2\sqrt{3},$$

$$MB=\sqrt{OB^2+OM^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}.$$

1. $\frac{MP}{MB}=\frac{7}{4\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{12}$, $\frac{MF}{MN}=\frac{\sqrt{21}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{21}}{12}$. Отношения сторон равны. Используя условие, что $\angle BMN$ общий, получим: $\triangle MPF\sim\triangle MBN$. Из подобия треугольников следует, что $\angle MPF=\angle MBN$. Эти углы — соответственные, образованные при пересечении двух прямых PF и BN прямой MB. Значит, $PF\parallel BN$.

2. Рассматривая треугольники MEF и MKN, можно аналогично доказать, что $FE\parallel NK$.

Так как две пересекающиеся прямые PF и FE плоскости PFE соответственно параллельны двум пересекающимся прямым BN и NK плоскости NBK, то эти плоскости параллельны.

б) В $\triangle MKN$ MO_1 — высота, $MO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона $\triangle ABC$ $MO_1 = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Пусть O_2 — точка пересечения MO_1 и FE. Поскольку плоскость PFE параллельна плоскости BNK, то расстояние от точки P до плоскости BNK равно расстоянию от точки O_2 до плоскости BNK, и оно равно длине отрезка O_2H (см. рис. 28), где точка H лежит на BO_1 и $O_2H \perp BO_1$. Докажем, что O_2H — расстояние от O_2 до плоскости BNK.

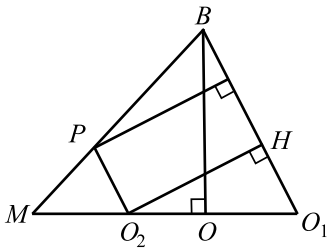


Рис. 28

$NK \perp MO_1$ и $NK \perp BO_1$ (MO_1 и BO_1 — высоты $\triangle MNK$ и $\triangle NBK$), значит, NK перпендикулярна плоскости MBO_1, и тогда NK перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в том числе $NK \perp O_2H$. По построению $O_2H \perp BO_1$. Прямая O_2H перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BNK, значит, она перпендикулярна BNK, и отрезок O_2H равен расстоянию от O_2 до плоскости BNK.

В треугольнике O_2HO_1: $O_2H = O_2O_1 \sin \angle HO_1O_2$.

$O_2O_1 = MO_1 - MO_2$.

Из $\triangle MEO_2$: $\angle MO_2E = 90°$, $\angle EMO_2 = 30°$;

$$MO_2 = ME \cos 30° = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

$$O_2O_1 = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3(4\sqrt{3} - \sqrt{7})}{4};$$

$$\sin \angle HO_1O_2 = \frac{BO}{BO_1} = \frac{BO}{\sqrt{BO^2 + OO_1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$O_2H = \frac{3(4\sqrt{3} - \sqrt{7})}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(12 - \sqrt{21})}{8}.$$

Ответ: $\frac{3(12 - \sqrt{21})}{8}$.

15. $\frac{4^x + 27 \cdot 2^x + 18}{2^{2x} + 8 \cdot 2^x + 12} \geqslant 1 + 2^x - \frac{2^x - 3}{2^x + 6}$.

Обозначим $2^x = t$, $t > 0$. Неравенство примет вид:

$$\frac{t^2 + 27t + 18}{t^2 + 8t + 12} \geqslant 1 + t - \frac{t - 3}{t + 6},$$

$$\frac{t^2+8t+12+19t+6}{t^2+8t+12} \geqslant 1+t-\frac{t-3}{t+6},$$

$$1+\frac{19t+6}{(t+2)(t+6)} \geqslant 1+t-\frac{t-3}{t+6},$$

$$\frac{19t+6}{(t+2)(t+6)} - t + \frac{t-3}{t+6} \geqslant 0,$$

$$-\frac{t(t^2+7t-6)}{(t+2)(t+6)} \geqslant 0.$$

Полученное неравенство при условии $t > 0$ равносильно неравенству $t^2+7t-6 \leqslant 0$ (так как $t > 0$, $t+2 > 0$ и $t+6 > 0$),

$$0 < t \leqslant \frac{\sqrt{73}-7}{2},$$

$$0 < 2^x \leqslant \frac{\sqrt{73}-7}{2},$$

$$x \leqslant \log_2 \frac{\sqrt{73}-7}{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \log_2 \frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]$.

16. а) 1. $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (по двум углам: $\angle BCO = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $\angle CBO = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD) (см. рис. 29).

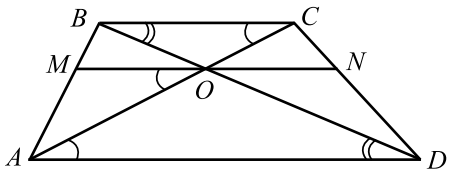


Рис. 29

Отсюда следует, что $\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{AO}$. Тогда $\frac{BO}{OD}+1 = \frac{OC}{AO}+1$, $\frac{BO+OD}{OD} = \frac{OC+AO}{AO}$, $\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{AO}$. (1)

2. $\triangle ABC \sim \triangle AMO$ (по двум углам: $\angle BCA = \angle MOA$, $\angle BAC$ — общий). Следовательно, $\frac{BC}{MO} = \frac{AC}{AO}$. (2)

Аналогично $\triangle DBC \sim \triangle DON \Rightarrow \frac{BC}{ON} = \frac{BD}{OD}$. С учётом (1), получим: $\frac{BC}{ON} = \frac{AC}{AO}$. Из этого равенства, с учётом (2), получим: $\frac{BC}{ON} = \frac{BC}{MO}$. Следовательно, $ON = MO$.

б) $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{BO}{BD - BO}$,

$\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{BD - BO}{BO} = \dfrac{BD}{BO} - 1 = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}$. Тогда $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

17. Кредит составляет 8 млн рублей. Срок возврата — 10 лет. Каждый год планируется платить некоторые суммы (каждый год разные), которые состоят из двух частей:

1) $x\%$ от остатка долга;

2) фиксированная сумма в счёт погашения основного долга $\dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ млн рублей.

Наибольший платёж будет в первом году: $8 \cdot \dfrac{x}{100} + \dfrac{4}{5}$ млн рублей.

Наименьший платёж будет в последнем году: $\left(8 - \dfrac{4}{5} \cdot 9\right) \cdot \dfrac{x}{100} + \dfrac{4}{5}$ млн рублей.

Получим систему:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{x}{100} + \dfrac{4}{5} \leqslant 1{,}36, \\ \left(8 - \dfrac{4}{5} \cdot 9\right) \cdot \dfrac{x}{100} + \dfrac{4}{5} \geqslant 0{,}856; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 80 \leqslant 136, \\ 0{,}8x + 80 \geqslant 85{,}6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 7, \\ x \geqslant 7; \end{cases}$$

$x = 7$.

Ответ: 7.

18. Уравнение $\dfrac{x^2 + ax + 2}{2} = \sqrt{4x^2 + ax + 1}$ при $\dfrac{x^2 + ax + 2}{2} < 0$ не имеет корней. При $x^2 + ax + 2 \geqslant 0$ обе части уравнения можно возвести в квадрат.

$(x^2 + ax + 2)^2 = 4(4x^2 + ax + 1)$,

$x^4 + ax^3 + 2x^2 + ax^3 + a^2x^2 + 2ax + 2x^2 + 2ax + 4 = 16x^2 + 4ax + 4$,

$x^4 + 2ax^3 + x^2(a^2 - 12) = 0$,

$x^2(x^2 + 2ax + a^2 - 12) = 0$,

$x^2((x + a)^2 - 12) = 0$,

$x_1 = 0$, $(x + a - \sqrt{12})(x + a + \sqrt{12}) = 0$,

$x_2 = -a + \sqrt{12}$, $x_3 = -a - \sqrt{12}$.

Чтобы исходное уравнение имело три различных корня, необходимо, чтобы числа x_1, x_2, x_3 были различными и для каждого из этих чисел выполнялось условие $x^2 + ax + 2 \geqslant 0$.

$x_2 \neq 0$ и $x_3 \neq 0$, если $a \neq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $a \neq -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

Обозначим $g(x) = x^2 + ax + 2$. $g(0) = 2 > 0$. Числа $x_2 = -a + 2\sqrt{3}$ и $x_3 = -a - 2\sqrt{3}$ будут корнями исходного уравнения, если выполняются условия:

$$\begin{cases} g(x_2) \geqslant 0, \\ g(x_3) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (-a + 2\sqrt{3})^2 + a(-a + 2\sqrt{3}) + 2 \geqslant 0, \\ (-a - 2\sqrt{3})^2 + a(-a - 2\sqrt{3}) + 2 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a\sqrt{3}+14 \geqslant 0, \\ 2a\sqrt{3}+14 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leqslant \dfrac{7}{\sqrt{3}}, \\ a \geqslant -\dfrac{7}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Таким образом, $a \in \left[-\frac{7}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}\right) \cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; \frac{7}{\sqrt{3}}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{7}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}\right) \cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; \frac{7}{\sqrt{3}}\right]$.

19. а) Пример пяти ходов.

1) $(33, 32, 2)$ — сумма $33 + 32 + 2 = 67$,
2) $(30, 29, 9)$ — сумма $30 + 29 + 9 = 68$,
3) $(27, 26, 16)$ — сумма $27 + 26 + 16 = 69$,
4) $(25, 24, 21)$ — сумма $25 + 24 + 21 = 70$,
5) $(23, 28, 20)$ — сумма $23 + 28 + 20 = 71$.

Возможны и другие примеры.

б) Предположим, что можно сделать 11 ходов. Тогда надо стереть все числа. Сумма всех чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 33 = \dfrac{1+33}{2} \cdot 33 = 561$.

С другой стороны, сумма чисел в каждой стёртой тройке больше 66. Значит, их общая сумма не меньше, чем $67 \cdot 11 = 737$. Но $737 > 561$. Получили противоречие. Сделать 11 ходов невозможно.

в) Предположим, что сделано k ходов. За эти ходы вычеркнуто $3k$ различных чисел. Их общая сумма S удовлетворяет неравенствам

$$S \leqslant 33 + 32 + 31 + \ldots + (33 - 3k + 1) = \frac{67 - 3k}{2} \cdot 3k,$$

$$S \geqslant 67 + 68 + 69 + \ldots + (66 + k) = \frac{133 + k}{2} \cdot k.$$

Значит, $\dfrac{133+k}{2} \cdot k \leqslant \dfrac{67-3k}{2} \cdot 3k$; $133 + k \leqslant (67 - 3k) \cdot 3$; $133 + k \leqslant 201 - 9k$; $k \leqslant 6{,}8$.

Но число ходов k является натуральным числом, поэтому $k \leqslant 6$.

Построим пример шести ходов. Первые 5 ходов такие же, как и в пункте а). Шестой ход — $(31, 22, 19)$, с суммой $31 + 22 + 19 = 72$. Таким образом, наибольшее возможное число ходов равно 6.

Ответ: а) $(33; 32; 2)$, $(30; 29; 9)$, $(27; 26; 16)$, $(25; 24; 21)$, $(23; 28; 20)$; б) нет; в) 6.

Решение варианта 7

1. Покупатель заплатит 93% стоимости покупки, что составит
$1500 \cdot 0{,}93 = 1395$ рублей.

Ответ: 1395.

2. На оси ординат находим промежуток от 50 до 90 °C. Ему соответствует на оси абсцисс промежуток от 5 до 8 минут. То есть, двигатель нагревается три минуты.

Ответ: 3.

3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (см. рис. 30). $AC = 4$, $BD = 8$, следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 16.$

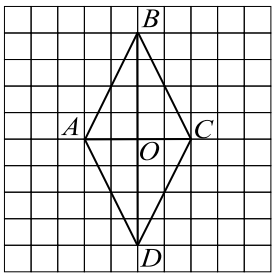


Рис. 30

Ответ: 16.

4. Общее число исходов (число качественных бассейнов + бассейнов с дефектами) равно $240 + 10 = 250$, благоприятных исходов (число качественных бассейнов) 240. По определению, вероятность равна $\frac{240}{250} = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

5. $(x-8)^2 = (x+20)^2$, $x^2 - 16x + 64 = x^2 + 40x + 400$, $-56x = 336$, $x = 336 : (-56)$, $x = -6$.

Ответ: -6.

6. Сумма углов треугольника равна 180°. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 37^\circ$. Треугольники ACD и AED равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle CAD = \angle EAD$, так как AD — биссектриса, $AC = AE$ по условию, AD — общая). Значит, $\angle C = \angle AED = 95^\circ$. Сумма углов четырёхугольника $ACDE$ равна 360°. Найдём $\angle CDE = 360^\circ - 95^\circ - 95^\circ - 37^\circ = 133^\circ$. Тогда смежный с этим углом $\angle EDB = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ$.

Ответ: 47.

7. Согласно физическому смыслу производной необходимо решить уравнение $x'(t) = 13$.

$x'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 8t + 1$. Решаем уравнение:

$\frac{3}{4}t^2 - 8t + 1 = 13$, $\frac{3}{4}t^2 - 8t - 12 = 0$, $3t^2 - 32t - 48 = 0$,

$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 3 \cdot 48}}{3} = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{3} = \frac{16 \pm 20}{3}$. $t_1 = -\frac{4}{3}$, $t_2 = 12$. Так как $t \geqslant 0$, то $t = 12$.

Ответ: 12.

8. Основанием параллелепипеда является прямоугольник, описанный около окружности радиусом 5. Значит, этот прямоугольник является квадратом, сторона которого равна диаметру окружности основания цилиндра. Так как радиус r этой окружности равен 5, то диаметр равен двум радиусам, то есть 10. Объём параллелепипеда V находим по форму-

ле $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = (2 \cdot r)^2 \cdot r$, где h — высота параллелепипеда, которая равна высоте цилиндра, то есть равна 5. Значит, объём параллелепипеда $V = 10^2 \cdot 5 = 500$.

Ответ: 500.

9. $\dfrac{3^{1,5} \cdot 5^{2,5}}{(3 \cdot 5)^{1,5}} = \dfrac{3^{1,5} \cdot 5^{2,5}}{3^{1,5} \cdot 5^{1,5}} = 5^{2,5-1,5} = 5^1 = 5.$

Ответ: 5.

10. Решим неравенство $F \geqslant 3300$. $\dfrac{2mS}{t^2} \geqslant 3300$, $\dfrac{2 \cdot 1100 \cdot 600}{t^2} \geqslant 3300$, $\dfrac{2 \cdot 100 \cdot 2}{t^2} \geqslant 1$, $t^2 \leqslant 400$, $-20 \leqslant t \leqslant 20$. Наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт 600 метров, равно 20 секундам.

Ответ: 20.

11. Скорость пассажирского поезда относительно товарного равна $80 - 50 = 30$ (км/ч) $= \dfrac{30000}{60}$ (м/мин) $= 500$ (м/мин). Обозначим длину пассажирского поезда через x метров, тогда пассажирский поезд пройдёт мимо товарного поезда расстояние, равное $(1100 + x)$ метров, за 3 мин 6 сек (3 мин 6 сек = 3,1 мин).

Составим и решим уравнение:

$\dfrac{1100 + x}{3{,}1} = 500,\ 1100 + x = 500 \cdot 3{,}1,\ x = 1550 - 1100,\ x = 450.$

Длина пассажирского поезда 450 м.

Ответ: 450.

12. Найдём производную исходной функции: $y'(x) = 6x^2 + 18x - 60$.

Найдём нули производной из уравнения $y'(x) = 0$; $6x^2 + 18x - 60 = 0$; $x^2 + 3x - 10 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$. Отсюда $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 31).

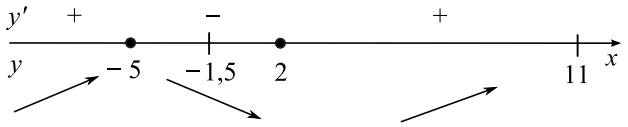


Рис. 31

Из рисунка видно, что функция $y = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 5$ убывает на промежутке $[-1{,}5;\ 2]$ и возрастает на промежутке $[2;\ 11]$. Значит, на промежутке $[-1{,}5;\ 11]$ наименьшее значение достигается при $x = 2$ и равно $y(2) = 2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 5 = 16 + 36 - 120 + 5 = -63$.

Ответ: -63.

13. а) После замены $t = \log_2\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)$ исходное уравнение примет вид $2t^2 - 7t - 15 = 0$. Корни этого уравнения $t = \dfrac{-3}{2}, t = 5$. Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) = 5, \\ \log_2\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) = \dfrac{-3}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin x}{2} = 2^5, \\ \dfrac{\sin x}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней. Решая второе уравнение, получим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

б) Запишем решение уравнения в виде $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ и выясним, для каких целых значений n и k справедливы неравенства $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 3\pi$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant 3\pi$.

Получим: $\frac{1}{8} \leqslant n \leqslant \frac{11}{8}$ и $-\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{9}{8}$, откуда следует, что $n = 1$, $k = 0$, $k = 1$.

При $n = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1 = \frac{9\pi}{4}$.

При $k = 0$ $x = \frac{3\pi}{4}$.

При $k = 1$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 1 = \frac{11\pi}{4}$.

Итак, $\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$ — корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$.

14. а) 1. Построим сечение призмы плоскостью γ (см. рис. 32).

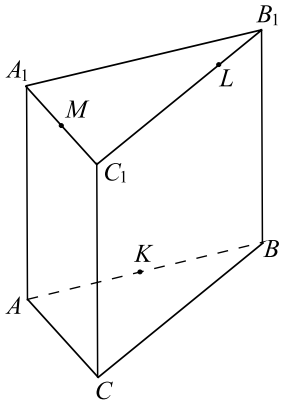


Рис. 32.

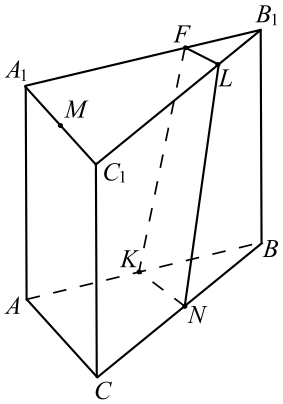


Рис. 33.

Плоскость ABC проходит через прямую AC, параллельную плоскости γ, и пересекает её (K — общая точка этих плоскостей), следовательно, линия пересечения этих плоскостей параллельна прямой AC. В плоскости ABC построим среднюю линию KN. Аналогично в плоскости $A_1B_1C_1$ проведём $LF \parallel A_1C_1$. $FKNL$ — сечение призмы плоскостью γ (см. рис. 33).

2. Докажем, что $BM \perp \gamma$.

Проведём $MT \parallel AA_1$. Плоскость BTM перпендикулярна прямой AC. Действительно, AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым (MT, BT) плоскости BTM. Следовательно, $BM \perp AC$, значит, $BM \perp KN$ (см. рис. 34).

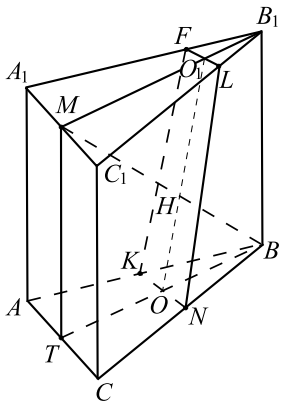


Рис. 34.

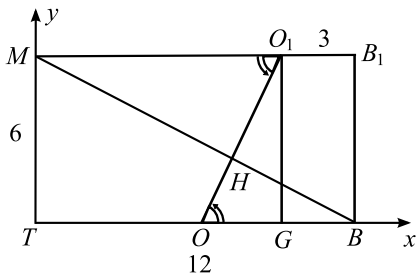


Рис. 35.

Докажем теперь, что $MB \perp OO_1$. Рассмотрим прямоугольник $BTMB_1$ (см. рис. 35). $MT = 6$, $B_1O_1 = 3$, $BT = 12$ (высоты правильных треугольников B_1FL и ABC соответственно). Введём систему координат (см. рис. 35) и найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{OO_1}$.

$M(0;6)$, $B(12;0)$, $\overrightarrow{MB}\{12;-6\}$; $O(6;0)$, $O_1(9;6)$, $\overrightarrow{OO_1}\{3;6\}$.

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{OO_1} = 12 \cdot 3 + (-6) \cdot 6 = 0$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{OO_1}$ перпендикулярны, следовательно, $MB \perp OO_1$. Итак, MB перпендикулярна двум пересекающимся прямым KN и OO_1 плоскости γ, а значит, $MB \perp \gamma$.

б) $\triangle MHO_1 \sim \triangle OO_1G$ как прямоугольные треугольники с равными острыми углами, $\angle MO_1H = \angle GOO_1$ как накрест лежащие при $MB_1 \parallel BT$ и секущей OO_1. Из этого следует, что $\dfrac{MO_1}{OO_1} = \dfrac{MH}{O_1G}$, $MO_1 = 9$, $O_1G = 6$, OO_1 найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OO_1G. $OO_1 = \sqrt{OG^2 + O_1G^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. $9 \cdot 6 = 3\sqrt{5}MH$, откуда $MH = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$. MH — высота пирамиды $MKNLF$.

Площадь равнобедренной трапеции $KNLF$ с основаниями KN и LF и высотой OO_1 равна $\dfrac{KN + LF}{2} \cdot OO_1$. KN — средняя линия треугольника ABC, $KN = \dfrac{1}{2}AB = 4\sqrt{3}$. LF — сторона правильного треугольника LB_1F ($LF \parallel A_1C_1$), поэтому $LF = LB_1 = 2\sqrt{3}$. $S_{KNLF} = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{15}$.

$$V_{MKNLF} = \frac{1}{3}S_{KNLF} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{15} \cdot \frac{18\sqrt{5}}{5} = 54\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $54\sqrt{3}$.

15. С помощью замены $3^x = t$, где $t > 0$ приведём неравенство к виду

$$\frac{35t}{4 + 10t - 6t^2} \geqslant \frac{t + 2}{3t + 1} - \frac{3t - 1}{t - 2}.$$

$-6t^2+10t+4=-2(3t^2-5t-2)=-2(t-2)(3t+1)$.

$$\frac{35t}{-2(t-2)(3t+1)}\geqslant\frac{(t+2)(t-2)-(3t-1)(3t+1)}{(3t+1)(t-2)};$$

$$\frac{35t}{-2(t-2)(3t+1)}\geqslant\frac{(t^2-4)-(9t^2-1)}{(3t+1)(t-2)};$$

$$\frac{35t}{-2(t-2)(3t+1)}\geqslant\frac{-8t^2-3}{(3t+1)(t-2)};$$

$$\frac{35t}{(t-2)(3t+1)}\leqslant\frac{16t^2+6}{(3t+1)(t-2)};$$

$$\frac{16t^2-35t+6}{(3t+1)(t-2)}\geqslant 0;$$

$$\frac{16(t-2)\left(t-\frac{3}{16}\right)}{(3t+1)(t-2)}\geqslant 0;$$

$$\frac{\left(t-\frac{3}{16}\right)}{(3t+1)}\geqslant 0,\ t\neq 2.$$

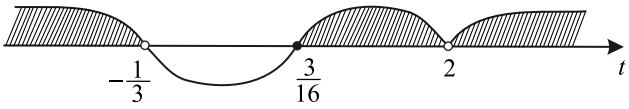


Рис. 36

$t<-\frac{1}{3}$ или $\frac{3}{16}\leqslant t<2, t>2$. С учётом условия $t>0$, $\frac{3}{16}\leqslant t<2, t>2$. Возвращаясь к переменной x, получим, что $\frac{3}{16}\leqslant 3^x<2$ или $3^x>2$, откуда $\log_3\frac{3}{16}\leqslant x<\log_3 2$ или $x>\log_3 2$.

Ответ: $\left[\log_3\frac{3}{16};\log_3 2\right)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

16. а) Для доказательства перпендикулярности прямых BM и MN достаточно доказать, что $BM\parallel KA$ (см. рис. 37), а это выполняется в случае, если подобны треугольники SBM и SKA, то есть если справедливо равенство $\frac{SB}{SK}=\frac{SM}{SA}$.

Пусть $\angle SML=\alpha$, тогда $\angle SKA=\angle ANK=\alpha$. Из параллельности прямых LA и BN следует, что треугольники SLA и SBN подобны, значит, верно равенство $\frac{SL}{SB}=\frac{SA}{SN}$.

В прямоугольном треугольнике SLM $\frac{SL}{SM}=\sin\alpha$, откуда $SM=\frac{SL}{\sin\alpha}$.

В прямоугольном треугольнике SAK $\frac{SA}{SK}=\sin\alpha$,

В прямоугольном треугольнике SKN $\frac{SK}{SN}=\sin\alpha$. $SK=SN\sin\alpha$.

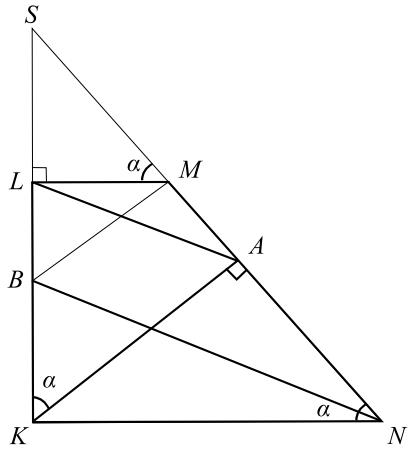


Рис. 37

Перемножая почленно равенства $\frac{SA}{SK} = \sin\alpha$ и $\frac{SK}{SN} = \sin\alpha$, получим: $\frac{SA}{SN} = \sin^2\alpha$, $SA = SN\sin^2\alpha$. Учитывая, что $\frac{SA}{SN} = \frac{SL}{SB}$, имеем $\frac{SL}{SB} = \sin^2\alpha$, откуда $SB = \frac{SL}{\sin^2\alpha}$.

Тогда $\frac{SB}{SK} = \frac{SL}{\sin^2\alpha \cdot SN \cdot \sin\alpha} = \frac{SL}{\sin^3\alpha \cdot SN}$,

$\frac{SM}{SA} = \frac{SL}{\sin\alpha \cdot SN\sin^2\alpha} = \frac{SL}{\sin^3\alpha \cdot SN}$. Правые части равенств равны, следовательно, $\frac{SB}{SK} = \frac{SM}{SA}$, значит, прямые LA и BN параллельны, и BM и MN перпендикулярны.

б) В силу подобия треугольников SML и SKN $\frac{LA}{BN} = \frac{SL}{SB}$.

Как показано в пункте а), $\frac{SL}{SB} = \sin^2\alpha$. По условию $\angle LMN = 150°$, $\angle LMN + \alpha = 180°$, $\alpha = 180° - 150° = 30°$. $\frac{SL}{SB} = \sin^2\alpha = \sin^2 30° = \frac{1}{4}$.

Ответ: б) $\frac{1}{4}$.

17. Пусть x млн рублей инвестировано в производство, тогда в банке размещено $(400 - x)$ млн рублей.

Деньги в банке размещены под 12% годовых, поэтому через год в банке станет $1{,}12(400 - x)$ млн рублей.

По условию через год эффективность вложения в производство ожидается в размере 250%, то есть вложенные x млн рублей превратятся в $2{,}5x$ млн рублей. Теперь от $2{,}5x$ нужно вычесть деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью: $(2{,}5x - 0{,}0022x^2)$ млн рублей, после чего нужно заплатить налог в 20% от этой суммы, поэтому останется 80% этой суммы, то есть $0{,}8 \cdot (2{,}5x - 0{,}0022x^2)$ млн рублей.

Рассмотрим функцию прибыли

$f(x) = 1{,}12(400 - x) + 0{,}8 \cdot (2{,}5x - 0{,}0022x^2) - 400,$

$f(x) = 448 - 1{,}12x + 2x - 0{,}8 \cdot 0{,}0022x^2 - 400,$

$f(x) = -0{,}8 \cdot 0{,}0022x^2 + 0{,}88x + 48.$

Это квадратичная функция, наибольшее значение она принимает в точке $x = \dfrac{-0{,}88}{2 \cdot (-0{,}8 \cdot 0{,}0022)} = \dfrac{88000}{2 \cdot 8 \cdot 22} = 250.$

$f(250) = -0{,}8 \cdot 0{,}0022 \cdot 250^2 + 0{,}88 \cdot 250 + 48 = -110 + 220 + 48 =$
$= 158$ (млн рублей).

Итак, прибыль составит 158 млн рублей.

Ответ: 158.

18. После приведения к общему знаменателю уравнение примет вид $\dfrac{3^x - a + a - 1}{\sqrt{3^x - a}} = 1$ или $\dfrac{3^x - 1}{\sqrt{3^x - a}} = 1$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$. Заметим, что после замены каждому положительному корню уравнения $\dfrac{t-1}{\sqrt{t-a}} = 1$ соответствует единственный корень исходного уравнения (это следует из монотонности функции $3^x = t$). Уравнение $\dfrac{t-1}{\sqrt{t-a}} = 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} t - 1 = \sqrt{t-a}, \\ t > a. \end{cases}$$

Возведём в квадрат обе части первого уравнения, учитывая, что $t \geqslant 1$:

$$\begin{cases} a = -t^2 + 3t - 1, \\ t > a, \\ t \geqslant 1. \end{cases}$$

Решим систему графически в системе координат tOa (см. рис. 38).

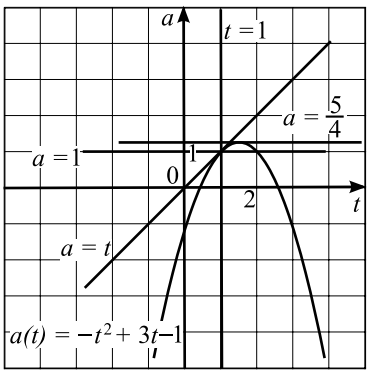


Рис. 38

Вершина параболы $a = -t^2 + 3t - 1$ — точка с координатами $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$.

Графики функций $a = -t^2 + 3t - 1$ и $a = t$ имеют единственную общую точку $t = 1$. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $a < t$, представляет собой полуплоскость, лежащую ниже прямой $a = t$. $-t^2 + 3t - 1 = t$, $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = 1$.

По графику видно, что парабола $a = -t^2 + 3t - 1$ и прямая $a = const$ имеют ровно две общие точки при условии $t \geqslant 1$, если $1 \leqslant a < \frac{5}{4}$, значит, исходное уравнение имеет ровно два корня при этих же значениях a.

Ответ: $\left[1; \frac{5}{4}\right)$.

19. а) Пример 7 ходов: $(7, 17, 36)$; $(8, 18, 35)$; $(9, 19, 34)$; $(11, 21, 32)$; $(12, 22, 31)$; $(13, 23, 30)$; $(14, 24, 29)$.

б) Предположим, что сделано 12 ходов, значит, стёрты все 36 чисел. С одной стороны, сумма всех чисел равна $1+2+\ldots+36 = 666$. С другой стороны, каждая из сумм стираемых трёх чисел больше 59. Значит, сумма стёртых чисел не меньше $60 + 61 + \ldots + 71 = 786$. Противоречие. Значит, нельзя сделать 12 ходов.

в) Пусть сделано 11 ходов. Тогда, с одной стороны, сумма всех вычеркнутых чисел больше $60 \cdot 11 = 660$, а с другой стороны, эта сумма не превосходит суммы $36 + 35 + \ldots + 4 = 660$. Противоречие. Значит, нельзя сделать 11 ходов. Покажем, что можно сделать 10 ходов.

$(7, 17, 36)$; $(8, 18, 35)$; $(9, 19, 34)$; $(10, 20, 33)$; $(11, 21, 32)$; $(12, 22, 31)$; $(13, 23, 30)$; $(14, 24, 29)$; $(15, 25, 28)$; $(16, 26, 27)$.

Ответ: а) $(7, 17, 36)$; $(8, 18, 35)$; $(9, 19, 34)$; $(11, 21, 32)$; $(12, 22, 31)$; $(13, 23, 30)$; $(14, 24, 29)$; б) нет; в) 10.

Решение варианта 8

1. Покупатель заплатит 93% стоимости покупки, что составит
$1200 \cdot 0{,}93 = 1116$ рублей.

Ответ: 1116.

2. На оси ординат находим промежуток от 60 до 80 °C. Ему соответствует на оси абсцисс промежуток от 6 до 7 минут. То есть двигатель нагревается одну минуту.

Ответ: 1.

3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (см. рис. 39). $AC = 6$, $BD = 8$, следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24$.

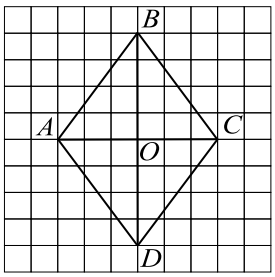


Рис. 39

Ответ: 24.

4. Общее число исходов (число качественных электроплит + электроплит с дефектами) равно $380 + 20 = 400$, благоприятных исходов (число качественных электроплит) 380. По определению, вероятность равна $\dfrac{380}{400} = 0{,}95$.

Ответ: 0,95.

5. $(x+12)^2 = 48x,\ x^2 + 24x + 144 = 48x,\ x^2 - 24x + 144 = 0,\ (x-12)^2 = 0,\ x - 12 = 0,$ $x = 12$.

Ответ: 12.

6. $\angle CBD = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$. Треугольники CBD и CED равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle BCD = \angle ECD$, так как CD — биссектриса, $BC = CE$ по условию, CD — общая). Значит, $\angle CBD = \angle CED = 98^\circ$. Сумма углов треугольника ADE равна 180°. Найдём $\angle ADE = 180^\circ - 26^\circ - 98^\circ = 56^\circ$.

Ответ: 56.

7. Согласно физическому смыслу производной необходимо решить уравнение $x'(t) = 26$.

$x'(t) = t^2 + 4t + 5$. Решаем уравнение: $t^2 + 4t + 5 = 26, t^2 + 4t - 21 = 0$, $t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm \sqrt{25} = -2 \pm 5$, $t_1 = -7$, $t_2 = 3$. Так как $t \geqslant 0$, то $t = 3$.

Ответ: 3.

8. Основанием параллелепипеда является прямоугольник, описанный около окружности радиусом 6. Значит, этот прямоугольник является квадратом, сторона которого равна диаметру окружности основания цилиндра. Так как радиус этой окружности равен 6, то диаметр равен двум радиусам, то есть 12. Но объём параллелепипеда V находится по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 12^2 \cdot h = 144 \cdot h$, где h — высота параллелепипеда. Объём параллелепипеда равен 288. Значит, $288 = 144 \cdot h$, $h = 2$.

Ответ: 2.

9. $\dfrac{7^{4,5} \cdot 2^{5,5}}{(2 \cdot 7)^{4,5}} = \dfrac{7^{4,5} \cdot 2^{5,5}}{2^{4,5} \cdot 7^{4,5}} = 2^{5,5-4,5} = 2^1 = 2$.

Ответ: 2.

10. Решим неравенство $F \geqslant 2480$. $\dfrac{2mS}{t^2} \geqslant 2480$,

$\dfrac{2 \cdot 1550 \cdot 500}{t^2} \geqslant 2480$, $\dfrac{2 \cdot 10 \cdot 500}{t^2} \geqslant 16$, $\dfrac{5 \cdot 125}{t^2} \geqslant 1$, $t^2 \leqslant 625$, $-25 \leqslant t \leqslant 25$.

Наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт 500 метров, равно 25 секундам.

Ответ: 25.

11. Скорость скорого поезда относительно пассажирского равна

$75 - 50 = 25$ (км/ч)$= \dfrac{25000}{60}$ (м/мин)$= \dfrac{1250}{3}$ (м/мин). Обозначим длину скорого поезда через x метров, тогда скорый поезд пройдёт мимо пассажирского поезда расстояние, равное $(750 + x)$ метров, за 3 минуты.

Составим и решим уравнение:

$\dfrac{750 + x}{3} = \dfrac{1250}{3}$, $750 + x = 1250$, $x = 500$ (м).

Длина скорого поезда равна 500 м.

Ответ: 500.

12. Найдём производную исходной функции: $y'(x) = 24x^2 + 42x - 90$.

Найдём нули производной из уравнения $y'(x) = 0; 24x^2+42x-90 = 0; 4x^2+7x-15 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-7 \pm 17}{8}$. Отсюда $x_1 = -3$, $x_2 = \dfrac{5}{4}$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 40).

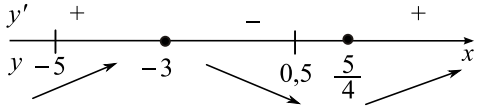


Рис. 40

Из рисунка видно, что функция $y = 8x^3 + 21x^2 - 90x - 189$ возрастает на промежутке $[-5; -3]$ и убывает на промежутке $[-3; 0{,}5]$. Значит, на промежутке $[-5; 0{,}5]$ наибольшее значение достигается при $x = -3$ и равно $y(-3) = 8 \cdot (-3)^3 + 21 \cdot (-3)^2 - 90 \cdot (-3) - 189 = -216 + 189 + 270 - 189 = 54$.

Ответ: 54.

13. а) После замены $t = \log_2(2\sin x + 1)$ исходное уравнение примет вид $t^2 - 17t + 16 = 0$. Корни этого уравнения $t = 1$, $t = 16$. Возвращаясь к переменной x, получим: $\left[\begin{array}{l} \log_2(2\sin x + 1) = 1, \\ \log_2(2\sin x + 1) = 16; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 2, \\ 2\sin x + 1 = 2^{16}. \end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней. Решая первое уравнение, получим: $\sin x = \dfrac{1}{2}, x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

б) Запишем решение уравнения в виде $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ и выясним, для каких целых значений n и k справедливы неравенства

$\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 2\pi$ и $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 2\pi$.

Получим: $\dfrac{1}{24} \leqslant n \leqslant \dfrac{11}{12}$ и $-\dfrac{7}{24} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{12}$, откуда следует, что нет целых значений n, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{1}{24} \leqslant n \leqslant \dfrac{11}{12}; k = 0$ — единственное целое k, удовлетворяющее неравенству $-\dfrac{7}{24} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{12}$.

При $k = 0$ $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = \dfrac{5\pi}{6}$. Итак, $\dfrac{5\pi}{6}$ — корень уравнения, принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $\dfrac{5\pi}{6}$.

14. Построим сначала сечение пирамиды плоскостью γ.

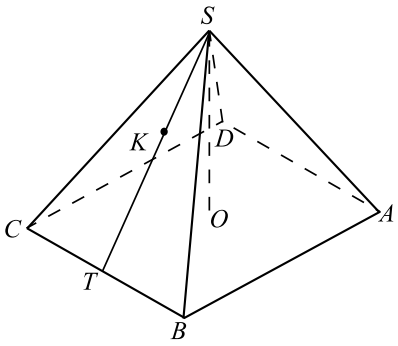


Рис. 41.

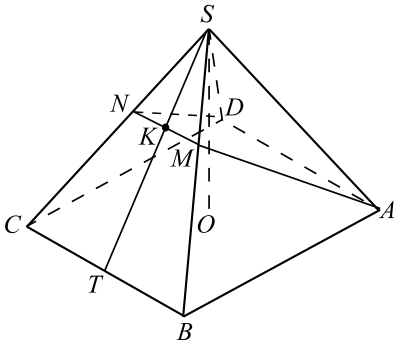


Рис. 42.

а) Плоскость γ пересекает плоскость SAD по прямой AD, а плоскость SBC — по прямой MN, проходящей через точку K, параллельной BC (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то линия пересечения параллельна это прямой). $ADNM$ — сечение пирамиды плоскостью γ. $ADNM$ — равнобедренная трапеция (см. рис. 42).

$BC \parallel \gamma$, следовательно, любая точка, принадлежащая прямой BC, равноудалена от плоскости γ. Значит, расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ.

б) Так как расстояние от любой точки прямой BC до плоскости γ одно и то же, будем искать расстояние от точки T до плоскости γ, то есть нужно из точки T провести отрезок TH, перпендикулярный плоскости ADN, который равен высоте пирамиды $CADNM$. Тогда $V_{CADNM} = \frac{1}{3} S_{ADNM} \cdot TH$. Точка K — середина отрезка MN, так как принадлежит апофеме ST. Обозначим через P середину отрезка AD, тогда $KP \perp AD$ как высота равнобедренной трапеции $ADNM$, $S_{ADNM} = \frac{AD + MN}{2} \cdot PK$.

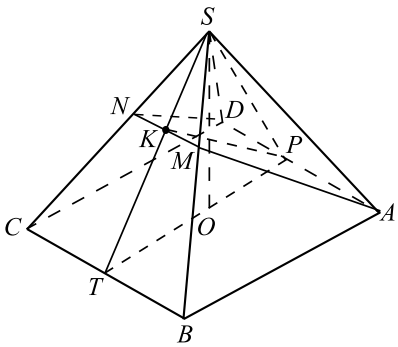


Рис. 43.

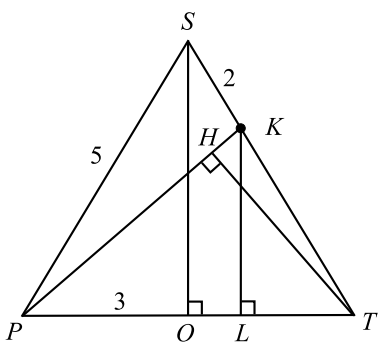


Рис. 44.

$AD \perp PST$ (см. рис. 43), действительно, $KP \perp AD$ и $PT \perp AD$, следовательно, достаточно построить отрезок $TH \perp PK$, так как тогда TH перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости γ (AD и PK).

$S_{\triangle PKT}$ выразим двумя способами: $\frac{1}{2}TH \cdot PK = \frac{1}{2}PT \cdot KL$ (см. рис. 44), откуда $TH = \frac{PT \cdot KL}{PK}$. $PT = 6$. ST — гипотенуза прямоугольного треугольника SOT с катетами $OT = 3$, $SO = 4$, по теореме Пифагора $ST = 5$. KL найдём из подобия прямоугольных треугольников SOT и KLT с общим острым углом STO: $\frac{SO}{KL} = \frac{ST}{KT} = \frac{OT}{LT}$, $\frac{4}{KL} = \frac{5}{3}$, $KL = \frac{12}{5}$, $\frac{3}{LT} = \frac{5}{3}$, $LT = \frac{9}{5}$, $OL = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$.

PK найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PKL:

$PK^2 = PL^2 + LK^2 = (PO + OL)^2 + LK^2$,

$PK^2 = \left(3 + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{585}{25}$, $PK = \frac{\sqrt{585}}{5} = \frac{3\sqrt{65}}{5}$.

$$TH = \frac{PT \cdot KL}{PK} = \frac{6 \cdot \frac{12}{5}}{\frac{3\sqrt{65}}{5}} = \frac{24}{\sqrt{65}} = \frac{24\sqrt{65}}{65}.$$

Основание MN равнобедренной трапеции найдём из подобия треугольников SMN и SBC, высоты которых $SK = 2$, $ST = 5$.

$\frac{SK}{ST} = \frac{MN}{BC}$, $\frac{MN}{6} = \frac{2}{5}$, откуда, $MN = \frac{12}{5}$ (см. рис. 43).

$$V_{CADNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + MN}{2} \cdot PK \cdot TH = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 + \frac{12}{5}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{65}}{5} \cdot \frac{24\sqrt{65}}{65} = 20,16.$$

Ответ: 20,16.

15. С помощью замены $2^x = t$, где $t > 0$, приведём неравенство к виду $\frac{1}{1+t} - \frac{2}{t^2 - t + 1} < \frac{1 - 2t}{t^3 + 1}$.

$$\frac{1}{1+t} - \frac{2}{t^2 - t + 1} < \frac{1 - 2t}{(t+1)(t^2 - t + 1)};$$

$$\frac{t^2 - t + 1 - 2 - 2t - 1 + 2t}{(1+t)(t^2 - t + 1)} < 0;$$

$$\frac{t^2 - t - 2}{(1+t)(t^2 - t + 1)} < 0;$$

$$\frac{(1+t)(t-2)}{(1+t)(t^2 - t + 1)} < 0;$$

$$\frac{t-2}{t^2 - t + 1} < 0, \quad t < 2, t \neq -1,$$

Учитывая условие $t > 0$, имеем $0 < t < 2$. Возвращаясь к переменной x, получим, что $0 < 2^x < 2$, откуда $x < 1$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

16. а) Для доказательства перпендикулярности прямых BM и MN достаточно доказать, что $BM \parallel KA$ (см. рис. 45), а это выполняется в случае, если подобны треугольники SBM и SKA, то есть если справедливо равенство $\dfrac{SB}{SK} = \dfrac{SM}{SA}$.

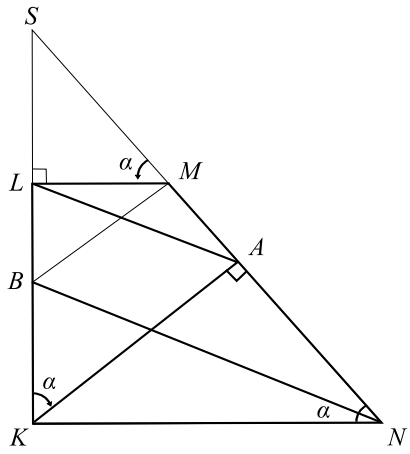


Рис. 45

Пусть $\angle SML = \alpha$, тогда $\angle SKA = \angle ANK = \alpha$. Из параллельности прямых LA и BN следует, что треугольники SLA и SBN подобны, значит, верно равенство $\dfrac{SL}{SB} = \dfrac{SA}{SN}$.

В прямоугольном треугольнике SLM $\dfrac{SL}{SM} = \sin\alpha$, откуда $SM = \dfrac{SL}{\sin\alpha}$.

В прямоугольном треугольнике SAK $\dfrac{SA}{SK} = \sin\alpha$.

В прямоугольном треугольнике SKN $\dfrac{SK}{SN} = \sin\alpha$. $SK = SN\sin\alpha$.

Перемножая почленно равенства $\dfrac{SA}{SK} = \sin\alpha$ и $\dfrac{SK}{SN} = \sin\alpha$, получим: $\dfrac{SA}{SN} = \sin^2\alpha, SA = SN\sin^2\alpha$. Учитывая, что $\dfrac{SA}{SN} = \dfrac{SL}{SB}$, имеем $\dfrac{SL}{SB} = \sin^2\alpha$, откуда $SB = \dfrac{SL}{\sin^2\alpha}$.

Тогда $\dfrac{SB}{SK} = \dfrac{SL}{\sin^2\alpha \cdot SN \cdot \sin\alpha} = \dfrac{SL}{\sin^3\alpha \cdot SN}$,

$\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SL}{\sin\alpha \cdot SN\sin^2\alpha} = \dfrac{SL}{\sin^3\alpha \cdot SN}$. Правые части равенств равны, следовательно, $\dfrac{SB}{SK} = \dfrac{SM}{SA}$, значит, прямые KA и BM параллельны, и BM и MN перпендикулярны.

б) В силу подобия треугольников SLA и SBN получим: $\dfrac{LA}{BN} = \dfrac{SL}{SB}$.

Как показано в пункте а), $\dfrac{SL}{SB} = \sin^2\alpha$. По условию $\angle LMN = 120°$, $\angle LMN + \alpha = 180°$, $\alpha = 180° - 120° = 60°$. $\dfrac{SL}{SB} = \sin^2\alpha = \sin^2 60° = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: б) $\dfrac{3}{4}$.

17. Пусть x млн рублей инвестировано в производство, тогда в банке размещено $(600 - x)$ млн рублей.

Деньги в банке размещены под 14% годовых, поэтому через год в банке станет $1{,}14(600 - x)$ млн рублей.

По условию через год эффективность вложения в производство ожидается в размере 220%, то есть вложенные x млн рублей превратятся в $2{,}2x$ млн рублей. Теперь от $2{,}2x$ нужно вычесть деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0{,}0031x^2$: $(2{,}2x - 0{,}0031x^2)$ млн рублей, после чего нужно заплатить налог в 20% от этой суммы, поэтому останется 80% этой суммы, то есть $0{,}8 \cdot (2{,}2x - 0{,}0031x^2)$ млн рублей.

Рассмотрим функцию прибыли

$f(x) = 1{,}14(600 - x) + 0{,}8 \cdot (2{,}2x - 0{,}0031x^2) - 600$,

$f(x) = -0{,}8 \cdot 0{,}0031x^2 + 0{,}62x + 84$.

Это квадратичная функция, наибольшее значение она принимает в точке $x = \dfrac{-0{,}62}{2 \cdot (-0{,}8 \cdot 0{,}0031)} = \dfrac{62000}{2 \cdot 8 \cdot 31} = 125$.

$f(125) = -0{,}8 \cdot 0{,}0031 \cdot 125^2 + 0{,}62 \cdot 125 + 84 = -38{,}75 + 77{,}5 + 84 =$
$= 122{,}75$ (млн рублей).

Итак, прибыль составит 122,75 млн рублей.

Ответ: 122,75.

18. Пусть $3^x = t, t > 0$. Заметим, что после замены каждому положительному корню уравнения $\sqrt{t^2 - 4a} = t - a$ соответствует единственный корень исходного уравнения (это следует из монотонности функции $3^x = t$). Уравнение $\sqrt{t^2 - 4a} = t - a$ равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 - 4a = t^2 - 2at, +a^2, \\ t > 0, \\ t \geqslant a; \end{cases} \qquad \begin{cases} a(-4 + 2t - a) = 0, \\ t > 0, \\ t \geqslant a. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то любое $t > 0$ является корнем первого уравнения системы, следовательно, исходное уравнение имеет бесконечное множество корней. Значит, $a \neq 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} t = \dfrac{a+4}{2}, \\ t > 0, \\ t \geqslant a; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+4}{2} > 0, \\ \dfrac{a+4}{2} \geqslant a, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} a > -4, \\ a \leqslant 4. \end{cases}$

Учитывая, что $a \neq 0$, получаем: $-4 < a < 0, 0 < a \leqslant 4$.

Ответ: $(-4; 0) \cup (0; 4]$.

19. Пример 6 ходов: а) $(2, 9, 20)$; $(8, 11, 19)$; $(7, 12, 18)$; $(3, 15, 17)$; $(4, 13, 16)$; $(1, 6, 21)$.

б) Предположим, что сделано 12 ходов, значит, стёрты все 36 чисел. С одной стороны, сумма всех чисел равна $1 + 2 + \ldots + 36 = 666$. С другой стороны, каждая из сумм стираемых трёх чисел меньше 40. Значит, сумма стёртых чисел меньше $40 \cdot 12 = 480$. Противоречие. Значит, нельзя сделать 12 ходов.

в) Пусть сделано 8 ходов. Стёрли 24 числа. Тогда сумма этих чисел не меньше $1 + 2 + 3 + \ldots + 24 = 300$. С другой стороны, эта сумма не больше суммы чисел $39 + 38 + 37 + 36 + 35 + 34 + 33 + 32 = 284$. Противоречие. Значит, нельзя сделать 8 ходов. Покажем, что можно сделать 7 ходов. $(2, 9, 20)$; $(8, 11, 19)$; $(7, 12, 18)$; $(3, 15, 17)$; $(4, 13, 16)$; $(1, 6, 21)$; $(5, 10, 14)$.

Ответ: а) $(2, 9, 20)$; $(8, 11, 19)$; $(7, 12, 18)$; $(3, 15, 17)$; $(4, 13, 16)$; $(1, 6, 21)$; б) нет; в) 7.

Решение варианта 10

1. 1 дюйм = 2,54 см; 41 дюйм$= 41 \cdot 2{,}54$ см$= 104{,}14$ см ≈ 104 см.

Ответ: 104.

2. На оси абсцисс выбираем отрезок, соответствующий дате 2 февраля с 0:00 часов до 24:00 часов. На этом отрезке найдём точку с наибольшей ординатой. По рисунку видим, что эта ордината равна -12.

Ответ: -12.

3. Проведём высоту CH параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$. $AD = 3$, $CH = 5$, $S_{ABCD} = 3 \cdot 5 = 15$ (см. рис. 46).

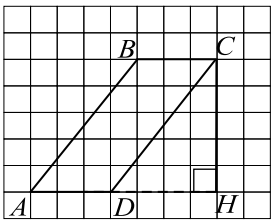


Рис. 46

Ответ: 15.

4. События «температура тела окажется ниже, чем 36,9 °C» и «температура окажется 36,9°C или выше» противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Искомая вероятность равна $1 - 0{,}84 = 0{,}16$.

Ответ: 0,16.

5. Уравнение $\dfrac{56}{x^2 + 7} = 1$ равносильно уравнению $x^2 + 7 = 56$. Из последнего уравнения получаем: $x^2 = 49$, $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. Меньший из корней равен -7.

Ответ: -7.

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Для параллелограмма $ABCD$ выполняется $S = AB \cdot DH = CB \cdot DE$. Получаем: $15DE = 20 \cdot 12$, $DE = 16$.

Ответ: 16.

7. Производная равна нулю в тех точках, в которых касательная к графику функции параллельна оси Ox. На заданном графике такими точками в промежутке $[-2;4]$ являются точки экстремума (максимума или минимума). Их, как видно из рисунка, ровно 6.

Ответ: 6.

8. Пусть радиус шара равен R, тогда объём шара находится по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. По условию $36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$. $108 = 4R^3$, $R^3 = 27$. $R = 3$. Так как шар вписан в куб, то длина ребра куба равна длине диаметра шара, но диаметр шара в два раза больше радиуса и равен $3 \cdot 2 = 6$. Объём куба V находится по формуле $V = a^3$, где a — ребро куба. Поэтому $V = a^3 = 6^3 = 216$.

Ответ: 216.

9. По свойству корней выполняются равенства: $\sqrt[5]{5} = \sqrt[20]{5^4}$; $\sqrt[20]{5^5} = \sqrt[4]{5}$. Поэтому $\frac{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[20]{5^4} \cdot \sqrt[20]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[20]{5^5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}} = 1$.

Ответ: 1.

10. Решим неравенство $F_A \leqslant 153\,125$; $1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 153\,125$, $98l^3 \leqslant 1531{,}25$, $l^3 \leqslant 15{,}625$, $l^3 \leqslant \frac{125}{8}$, $l \leqslant \frac{5}{2}$. Максимальная длина ребра куба равна 2,5 метрам.

Ответ: 2,5.

11. В 12 литрах 7%-ного раствора содержится $12 \cdot 0{,}07 = 0{,}84$ л некоторого вещества. Добавили 9 литров воды, стало 21 литр раствора, в котором 0,84 л некоторого вещества. Найдём концентрацию нового раствора: $0{,}84 : 21 \cdot 100 = 4\%$.

Ответ: 4.

12. Исходная функция определена при $x \neq 0$, при этом $y = -x - \frac{10\,000}{x}$. Тогда производная исходной функции $y'(x) = -1 + \frac{10\,000}{x^2}$. Найдём нули производной: $y'(x) = 0$ при $\frac{10\,000}{x^2} = 1$, $x^2 = 10\,000$, $x = \pm 100$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 47).

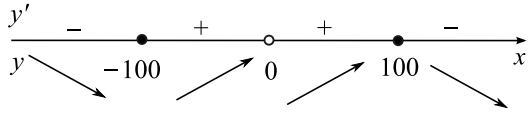


Рис. 47

Из рисунка видно, что функция $y = -\frac{x^2 + 10\,000}{x}$ имеет единственную точку минимума $x = -100$.

Ответ: -100.

13. а) Запишем уравнение в виде
$5 \cdot 0{,}2^{2\cos x} - 26\sqrt{5} \cdot 0{,}2^{\cos x} + 25 = 0$. После замены $t = 0{,}2^{\cos x}$ исходное уравнение примет

вид $5t^2 - 26\sqrt{5}t + 25 = 0$. Корни этого уравнения $t = 5\sqrt{5}, t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Возвращаясь к переменной x, получим: $\left[\begin{array}{l} 0{,}2^{\cos x} = 5\sqrt{5}, \\ 0{,}2^{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5^{-\cos x} = 5^{\frac{3}{2}}, \\ 5^{-\cos x} = 5^{-\frac{1}{2}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{3}{2}, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней. Решая второе уравнение, получим: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

б) Запишем решение уравнения в виде $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ или $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ и выясним, для каких целых значений n и k справедливы неравенства

$-\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ и $-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

Получим: $-\dfrac{1}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{11}{12}$ и $-\dfrac{2}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{12}$, откуда следует, что два целых значения $n = 0$ и $k = 0$ удовлетворяют соответствующим неравенствам.

При $n = 0 \quad x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \dfrac{\pi}{3}$.

При $k = 0 \quad x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = -\dfrac{\pi}{3}$. Итак, $\dfrac{\pi}{3}$ и $-\dfrac{\pi}{3}$ — корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$.

14. а) Построим сечение призмы плоскостью γ (см. рис. 48).

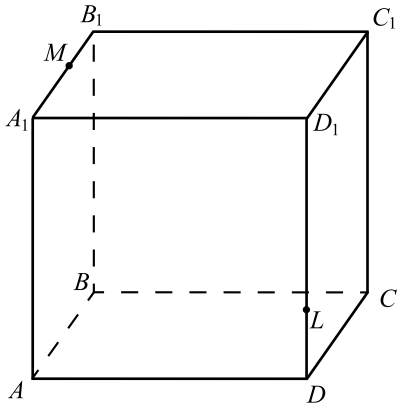


Рис. 48.

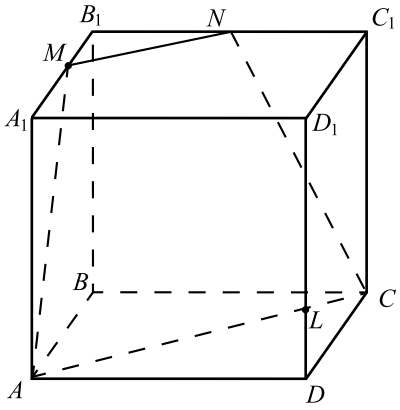


Рис. 49.

Плоскость γ пересекает плоскость ABC по прямой AC, а плоскость $A_1B_1C_1$ — по прямой MN (N — середина B_1C_1), проходящей через точку M, параллельной A_1C_1 (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то

линия пересечения параллельна это прямой). $AMNC$ — сечение пирамиды плоскостью γ. $AMNC$ — равнобедренная трапеция (см. рис. 49). $AMNC \parallel A_1C_1$.

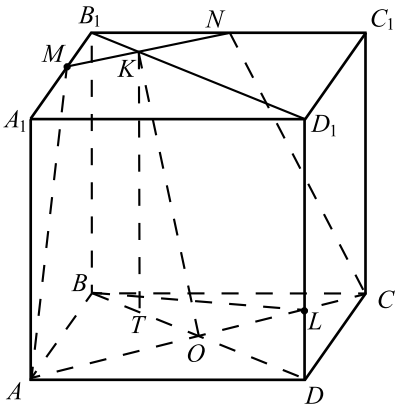


Рис. 50.

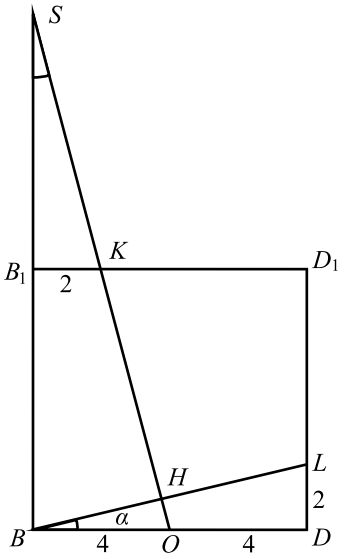


Рис. 51.

Рассмотрим диагональное сечение BB_1D_1D призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 50). BB_1D_1D — квадрат, так как $BB_1 = BD = 8$. O — точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$ со стороной, равной $4\sqrt{2}$, значит, $AO = OC = 4$. MN — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, $MK = KN$, $B_1K = \frac{1}{4}B_1D_1 = 2$. Пусть $\angle DBL = \alpha$ (см. рис. 51), тогда в прямоугольном треугольнике DBL $\angle BLD = 90^\circ - \alpha$. $\triangle SBO \sim \triangle B_1SK$ с коэффициентом подобия 2, следовательно, $SB_1 = 8$. $\triangle B_1SK = \triangle DBL$ по двум катетам. Значит, $\angle BSO = \alpha$, $\angle BOS = 90^\circ - \alpha$, $\angle HOD = 180^\circ - \angle HOB = 180 - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$. В выпуклом четырёхугольнике $OHLD$ сумма углов равна 360°: $\angle O + \angle H + \angle L + \angle D = 360^\circ$, $\angle H = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = 90^\circ$.

Итак, доказано, что $BL \perp KO$, кроме того, AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1, а значит, AC перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в частности прямой BL. Прямая BL перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости γ, следовательно, $BL \perp \gamma$. Что и требовалось доказать.

б) $V_{BAMNC} = \frac{1}{3}S_{AMNC} \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{MN + AC}{2} \cdot KO \cdot BH$.

$MN = 4$, $AC = 8$, KO найдём по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника KOT, где $KT \parallel BB_1$ (см. рис. 50), с катетами $KT = 8$ и $OT = TB = 2$.

$KO = \sqrt{KT^2 + OT^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$.

Рассмотрим рисунок 51. BH найдём из подобия прямоугольных треугольников BHO и SBO ($\angle HBO = \angle BSO$): $\frac{BH}{BO} = \frac{SB}{SO}$. $BO = 4$, $SB = 16$. Из подобия треугольников SBO и B_1SK с коэффициентом подобия 2 следует, что $SO = 2KO = 4\sqrt{17}$.

$\frac{BH}{4} = \frac{16}{4\sqrt{17}}$, $BH = \frac{16}{\sqrt{17}}$. $V_{BAMNC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MN + AC}{2} \cdot KO \cdot BH =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4+8}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{16}{\sqrt{17}} = 64.$

Ответ: 64.

15. С помощью замены $4^x = t$, где $t > 0$, приведём неравенство к виду

$$\frac{4t+3}{1+2t} + \frac{10t+4}{5t+4} < \frac{9t+8}{2+3t} + \frac{4t}{4t+3}.$$

Выделим целую часть в каждом слагаемом:

$$2 + \frac{1}{1+2t} + 2 - \frac{4}{5t+4} < 3 + \frac{2}{2+3t} + 1 - \frac{3}{4t+3},$$

$$\frac{1}{1+2t} - \frac{2}{2+3t} + \frac{3}{4t+3} - \frac{4}{5t+4} < 0,$$

$$\frac{2+3t-2-4t}{(1+2t)(2+3t)} + \frac{15t+12-12-16t}{(3+4t)(5t+4)} < 0,$$

$$\frac{t}{(1+2t)(2+3t)} + \frac{t}{(3+4t)(5t+4)} > 0,$$

$$\frac{t(20t^2+31t+12+6t^2+7t+2)}{(1+2t)(2+3t)(3+4t)(5t+4)} > 0,$$

$$\frac{2t(13t^2+19t+7)}{(1+2t)(2+3t)(3+4t)(5t+4)} > 0,$$

Решением последнего неравенства при $t > 0$ будет любое значение t.

Возвращаясь к переменной x, получим неравенство $4^x > 0$. Решением этого неравенства является множество R всех действительных чисел.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

16. а) По условию $S_{ANLM} = S_{CLD}$ (см. рис. 52), следовательно, $S_{ANLM} + S_{LMD} = S_{CLD} + S_{LMD}$, $S_{ANLM} + S_{LMD} = S_{AND}$, $S_{CLD} + S_{LMD} = S_{CMD}$, значит, $S_{AND} = S_{CMD}$. $2S_{AND} = 2S_{CMD} = S_{ACD} = S_{ABD}$ (треугольники ACD и ABD имеют общее основание AD и общую высоту). Итак, $2S_{AND} = S_{ABD} = S_{AND} + S_{BND}$, откуда следует, что $S_{AND} = S_{BND}$, а это означает, что точка N — середина стороны AB (у треугольников AND и BND общая высота).

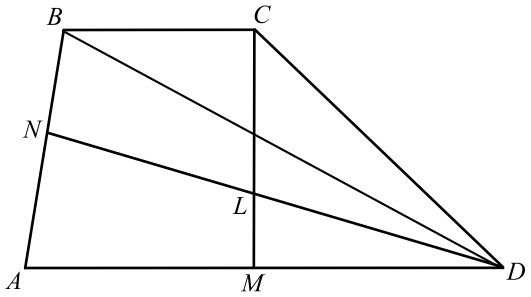


Рис. 52

б) Пусть K — точка пересечения прямых CN и AD (см. рис. 53). Заметим, что $S_{ABCD} = S_{CKD}$ ($\triangle AKN = \triangle BCN$ по второму признаку равенства треугольников) и $\dfrac{CL}{CM} = \dfrac{S_{CLD}}{S_{CMD}}$.

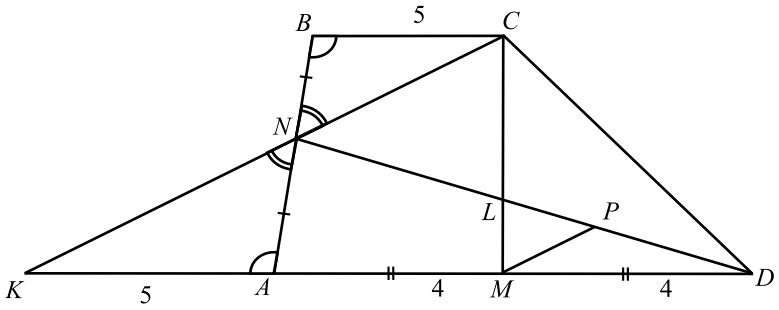


Рис. 53

Проведём $MP \parallel KC$, тогда из подобия треугольников NCL и LMP ($\angle MLP = \angle NLC, \angle LPM = \angle CNL$) $\dfrac{CL}{LM} = \dfrac{CN}{MP} = \dfrac{KN}{MP}$.

Из подобия треугольников KND и DMP ($KN \parallel MP$) $\dfrac{KN}{MP} = \dfrac{KD}{MD} = \dfrac{13}{4}$. Значит, $\dfrac{CL}{LM} = \dfrac{KN}{MP} = \dfrac{13}{4}$; $4CL = 13CM - 13CL$, $17CL = 13CM$, следовательно, $\dfrac{CL}{CM} = \dfrac{13}{17} = \dfrac{S_{CLD}}{S_{CMD}}$, откуда $S_{CLD} = \dfrac{13}{17} S_{CMD}$.

$\dfrac{S_{CMD}}{S_{CKD}} = \dfrac{MD}{KD} = \dfrac{4}{13}$, откуда $S_{CMD} = \dfrac{4}{13} S_{CKD} = \dfrac{4}{13} S_{ABCD}$.

Подставляя $S_{CMD} = \dfrac{4}{13}\, S_{ABCD}$ в равенство $S_{CLD} = \dfrac{13}{17}\, S_{CMD}$, получим $S_{CLD} = \dfrac{13}{17} \cdot S_{CMD} = \dfrac{13}{17} \cdot \dfrac{4}{13}\, S_{ABCD} = \dfrac{4}{17}\, S_{ABCD}$. Учитывая, что $S_{ANLM} = S_{CLD}$, окончательно получим: $S_{ANLM} = \dfrac{4}{17} S_{ABCD}$.

Ответ: $\dfrac{4}{17}$.

17. Пусть N — сумма кредита. Тогда долг на начало каждого квартала будет соответственно равен: N; $0{,}75N$; $0{,}4N$. В первом месяце первого квартала сумма долга возрастёт на 6% и составит $1{,}06N$. Поскольку после выплаты части долга во втором месяце первого квартала долг станет равным $0{,}75N$, то первая выплата составит $1{,}06N - 0{,}75N = 0{,}31N$, то есть первая выплата составит 31%. Рассуждая аналогично, найдём вторую выплату:

$1{,}06 \cdot 0{,}75N - 0{,}4N = 0{,}795N - 0{,}4N = 0{,}395N$, значит, во втором квартале будет погашено $39{,}5\%$ всего кредита. Наконец, третья и последняя выплата составит $1{,}06 \cdot 0{,}4N = 0{,}424N$, то есть $42{,}4\%$.

Всего за год будет выплачено $31\% + 39{,}5\% + 42{,}4\% = 112{,}9\%$. Таким образом, общая сумма выплат больше суммы кредита на разность $112{,}9\% - 100\% = 12{,}9\%$.

Ответ: 12,9.

18. В левой части уравнения выделим целую часть

$$\frac{3x + a - x^2 + 4a^2x - x^3}{4a^2x - x^3} = \frac{4a^2x - x^3}{4a^2x - x^3} + \frac{-x^2 + 3x + a}{4a^2x - x^3} = 1 + \frac{-x^2 + 3x + a}{4a^2x - x^3}.$$

Тогда уравнение примет вид $\dfrac{-x^2 + 3x + a}{4a^2x - x^3} = 0$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + a = 0, \\ 4a^2x - x^3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = x^2 - 3x, \\ x \neq 0, x \neq \pm 2a. \end{cases}$$

Решим систему графически в системе координат xOa. Для этого строим графики функций $a = x^2 - 3x$ и $a = \pm\dfrac{x}{2}$.

Графиком функции $a = x^2 - 3x$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы — точка $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{4}\right)$, точки $(0; 0)$ и $(3; 0)$ принадлежат параболе. Графиками функций $a = \pm\dfrac{x}{2}$ являются прямые.

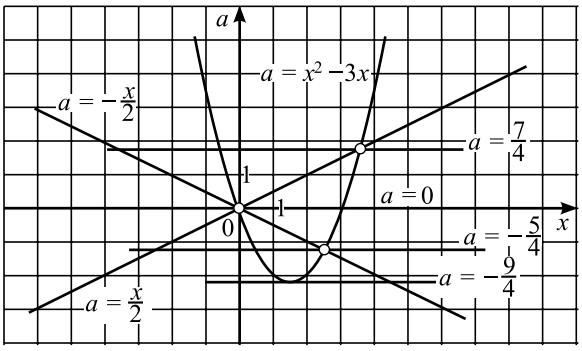


Рис. 54

Решая уравнение $x^2 - 3x = \dfrac{x}{2}$, находим точки пересечения прямой $a = \dfrac{x}{2}$ и параболы $a = x^2 - 3x$: $x = 0$, $x = \dfrac{7}{2}$, откуда $a = 0$, $a = \dfrac{7}{4}$. Аналогично, решая уравнение $x^2 - 3x = -\dfrac{x}{2}$, находим $x = 0$, $x = \dfrac{5}{2}$. Тогда $a = 0$, $a = -\dfrac{5}{4}$. Выкалываем эти точки (см. рис. 54).

По рисунку видим, что ровно одна точка пересечения параболы с каждой из прямых при $a = -\dfrac{9}{4}$, $a = -\dfrac{5}{4}$, $a = 0$, $a = \dfrac{7}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{9}{4}; -\dfrac{5}{4}; 0; \dfrac{7}{4}$.

19. а) Пример: $(2, 7, 11, 14, 16)$.

б) Да, может. Пример: $(6, 7, 7, 6, 3)$.

в) Пусть первое и шестое числа равны 1 (наименьшие натуральные числа). Рассмотрим последовательность $(1, a, b, c, d, 1)$.

Заметим, что ни одно из натуральных чисел a, b, c, d не может быть равно единице, в противном случае нарушено условие: каждое число больше среднего арифметического соседних с ним чисел (кроме первого и последнего). Если предположить, что $a = 2$, тогда из условия $a > \dfrac{1+b}{2}$ следует, что $4 > 1 + b$, $b < 3$, $b = 2$, что невозможно. Действительно, при $b = 2$ в последовательности $(1, 2, 2, c, d, 1)$ число c может принимать только одно значение, равное 1, что невозможно. Итак, $a \neq 2$.

Пусть $a = 3$. Из условия $a > \dfrac{1+b}{2}$ следует, что $3 > \dfrac{1+b}{2}$ или $b < 5$, то есть $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$. Легко убедиться, что $b \neq 2$, $b \neq 3$. Рассуждая аналогично, получим: $c = 4$, $d = 3$. $(1, 3, 4, 4, 3, 1)$. Минимальная сумма равна 16.

Ответ: а) $(2, 7, 11, 14, 16)$; б) да; в) 16.

Решение варианта 11

1. 1 дюйм = 2,54 см; 55 дюймов= $55 \cdot 2{,}54$ см= 139,7 см $\approx$ 140 см.

Ответ: 140.

2. На оси абсцисс выбираем отрезок, соответствующий дате 13 мая с 0:00 часов до 24:00 часов. На этом отрезке найдём точку с наименьшей ординатой. По рисунку видим, что эта ордината равна 2.

Ответ: 2.

3. Проведём высоту CH параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$. $AD = 5$, $CH = 2$, $S_{ABCD} = 5 \cdot 2 = 10$ (см. рис. 55).

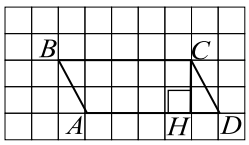


Рис. 55

Ответ: 10.

4. Обозначим через A событие «М. верно решит ровно 4 задачи» и через B событие «М. верно решит больше 4 задач». Они несовместны, и их объединением является событие «М. верно решит больше 3 задач», поэтому сумма вероятностей событий A и B равна вероятности события $A \cup B$, то есть $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Искомая вероятность равна $P(A) = 0{,}61 - 0{,}52 = 0{,}09$.

Ответ: 0,09.

5. $\dfrac{x - 125}{5 - x} = \dfrac{-4}{1}$, при $x \neq 5$ получим: $-4(5 - x) = x - 125$, $3x = -105$, $x = -35$.

Ответ: -35.

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне ($S = ah_a$). Найдём высоты параллелограмма: $h_1 = 60 : 8 = 7{,}5$, $h_2 = 60 : 12 = 5$. Меньшая высота этого параллелограмма равна 5.

Ответ: 5.

7. Согласно определению первообразной выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ можно записать в виде $F'(x) = 0$. Так как на рисунке изображён график функции $y = F(x)$, то надо найти те точки промежутка $[-3; 3]$, в которых производная функции $F(x)$ равна нулю.

Из рисунка видно, что это будут абсциссы экстремальных точек (максимума или минимума) графика $F(x)$. Их на указанном промежутке ровно 5 (две точки минимума и три точки максимума).

Ответ: 5.

8. Из рисунка, указанного в условии, видно, что, с одной стороны, диаметр шара является диаметром окружности основания цилиндра, а с другой стороны, является высотой цилиндра. Пусть радиус шара равен R, тогда его диаметр равен $2R$, значит, высота цилиндра H равна $2R$. Находим площадь полной поверхности цилиндра: $S_{\text{полн. пов. цил.}} = 2S_{\text{осн. цил.}} + S_{\text{бок. пов. цил.}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. $2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2$. По условию $24 = 6\pi R^2$. Отсюда $\pi R^2 = 4$. Так как $S_{\text{пов. шара}} = 4\pi R^2$, то искомая площадь равна $4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

9. $\dfrac{2\sqrt[12]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{2\sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = 2.$

Ответ: 2.

10. Решим неравенство $F_A \leqslant 1\,134\,000$;
$4{,}2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot r^3 \leqslant 1\,134\,000$, $42r^3 \leqslant 1134$, $r^3 \leqslant 27$, $r \leqslant 3$.

Максимальный радиус аппарата равен 3 метрам.

Ответ: 3.

11. Обозначим массу первого сплава через x кг. Тогда масса второго сплава $(x + 2)$ кг. Содержание железа в первом сплаве равно $0{,}12x$ кг, во втором сплаве — $0{,}28(x + 2)$ кг. Третий сплав имеет массу $x + x + 2 = 2x + 2$ (кг), и в нём содержание железа равно $2(x + 1) \cdot 0{,}21 = 0{,}42(x + 1)$ кг.

Составим и решим уравнение:
$0{,}12x + 0{,}28(x + 2) = 0{,}42(x + 1)$, $6x + 14(x + 2) = 21(x + 1)$, $x = 7$. Третий сплав имеет массу $2 \cdot 7 + 2 = 16$ (кг).

Ответ: 16.

12. Исходная функция определена при $x \neq 0$. Тогда производная исходной функции $y'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2}$. Найдём нули производной: $y'(x) = 0$ при $\dfrac{25}{x^2} = 1$, $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Исследуемому промежутку принадлежит только значение $x = 5$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 56).

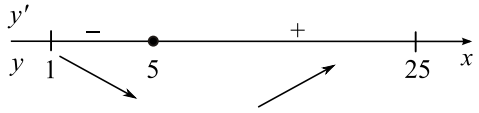


Рис. 56

Из рисунка видно, что функция $y = x + \dfrac{25}{x} + 2017$ убывает на промежутке $[1;\ 5]$ и возрастает на промежутке $[5;\ 25]$. Наименьшее значение достигается при $x = 5$ и равно $y(5) = 5 + \dfrac{25}{5} + 2017 = 2027$.

Ответ: 2027.

13. Так как $\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{3}$, то $\sin^2\dfrac{\pi}{6} = \cos^2\dfrac{\pi}{3}$, значит, заданное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x = \cos^2 2x$, которое, в свою очередь, равносильно уравнению $\sin^2 x - \cos^2 2x = 0$.

Но $\sin^2 x - \cos^2 2x = (\sin x - \cos 2x) \cdot (\sin x + \cos 2x)$ и
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, поэтому уравнение примет вид
$(\sin x - (1 - 2\sin^2 x)) \cdot (\sin x + (1 - 2\sin^2 x)) = 0$,
$(2\sin^2 x + \sin x - 1) \cdot (2\sin^2 x - \sin x - 1) = 0$.

Тогда либо $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, либо $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Решим первое уравнение как квадратное относительно $\sin x$, $(\sin x)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$. Поэтому либо $\sin x = -1$, либо $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Если $\sin x = -1$, то $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. Если $\sin x = \dfrac{1}{2}$, то либо $x = \dfrac{\pi}{6} + 2s\pi$, $s \in Z$, либо $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2t\pi$, $t \in Z$.

Аналогично, решая второе уравнение, получаем либо $\sin x = 1$, либо $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in Z$, либо $x = \dfrac{-\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$, либо $x = \dfrac{-5\pi}{6} + 2p\pi$, $p \in Z$.

Объединим полученные решения:

$x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in Z$; $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + s\pi$, $s \in Z$.

б) Выберем корни, которые попали в заданный промежуток с помощью числовой окружности (см. рис. 57).

Получим: $x_1 = \dfrac{7\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{23\pi}{6}$, $x_3 = \dfrac{25\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{6} + s\pi$, $s \in Z$; б) $\dfrac{7\pi}{2}$, $\dfrac{23\pi}{6}$, $\dfrac{25\pi}{6}$.

14. а) Рассмотрим рисунок 58.

Так как все боковые рёбра наклонены под одним и тем же углом к основанию, то основание высоты пирамиды (на рис. 58 это точка H) является центром окружности,

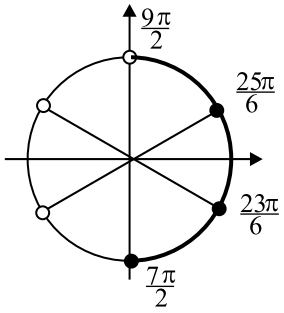


Рис. 57

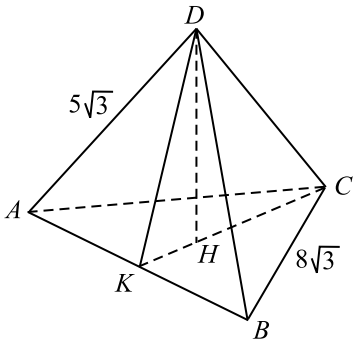


Рис. 58

описанной около треугольника ABC. Но треугольник ABC — правильный, поэтому H является точкой пересечения высот (а значит, и медиан). Отсюда следует, что $AB \perp CK$.

По условию боковые рёбра пирамиды равны, поэтому треугольник ABD равнобедренный, DK является его медианой, значит, и высотой. Значит, $AB \perp DK$. Получаем, что AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости KDC, поэтому $AB \perp KDC$.

Следовательно, $AB \perp CD$.

б) Проведём в треугольнике KDC высоту KT (см. рис. 59). Так как $AB \perp KDC$, то $AB \perp KT$. Значит, KT является общим перпендикуляром к прямым AB и CD, а длина отрезка KT является расстоянием между прямыми AB и CD.

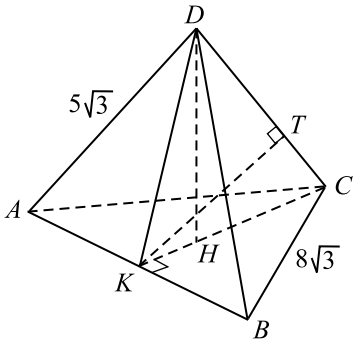


Рис. 59

В равностороннем треугольнике ABC высота $KC = AC \cdot \cos 30^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$,

$KH = \dfrac{1}{3}KC = 4$. В треугольнике ADK $AK = \dfrac{1}{2}AB = 4\sqrt{3}$,

$KD = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике DHK

$DH = \sqrt{KD^2 - KH^2} = \sqrt{27 - 16} = \sqrt{11}$.

$2 \cdot S_{KDC} = KC \cdot DH = KT \cdot DC$,

$KT = \dfrac{KC \cdot DH}{DC} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{11}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{33}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{33}}{5}$.

15. ОДЗ неравенства является множество всех решений системы

$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 1 \neq 0. \end{cases}$

$x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right) \cup$

$\cup \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Перейдём в неравенстве к логарифмам по основанию 2.

$$\frac{1}{\dfrac{\log_2 0{,}5}{\log_2(x^2+x)}} + \frac{1}{\dfrac{\log_2 0{,}25}{\log_2(x^2+x)}} + \frac{1}{\dfrac{\log_2 4}{\log_2(x^2+x)}} \geqslant 1,$$

$$\frac{\log_2(x^2+x)}{-1} + \frac{\log_2(x^2+x)}{-2} + \frac{\log_2(x^2+x)}{2} \geqslant 1,$$

$\log_2(x^2+x) \cdot \left(-1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \geqslant 1$, $-\log_2(x^2+x) \geqslant 1$, $\log_2(x^2+x) \leqslant -1$.

$\log_2(x^2+x) \leqslant \log_2 0{,}5$, $x^2 + x \leqslant 0{,}5$, $x^2 + x - 0{,}5 \leqslant 0$.

Находим корни квадратного трёхчлена $x^2 + x - 0{,}5$:

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, поэтому множеством решений неравенства $x^2 + x - 0{,}5 \leqslant 0$ будет множество $\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Так как $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$ и $0 < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

то множеством решений неравенства будет множество

$\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; -1\right) \cup \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; -1\right) \cup \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

16. а) Рассмотрим рисунок 60. На нём O_1 и O_2 — центры окружностей (по свойству вписанной в угол окружности точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle AOB$), K и T — точки пересечения соответственно AB и CD с биссектрисой. O_1A и O_2C — радиусы окружностей, перпендикулярные касательной AC.

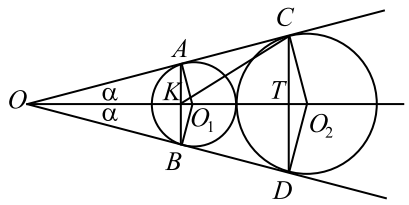


Рис. 60

$\triangle O_1AO = \triangle O_1BO$ по общей гипотенузе и острому углу, поэтому $AO = BO$. Таким образом, треугольник AOB является равнобедренным, и биссектриса OK угла O является высотой и медианой, поэтому точка K является серединой отрезка AB. Это и означает, что прямая AB перпендикулярна биссектрисе $\angle AOB$.

б) Пусть $\angle AOO_1$ равен α. Проведём через O_1 прямую O_1L, параллельную AC (см. рис. 61).

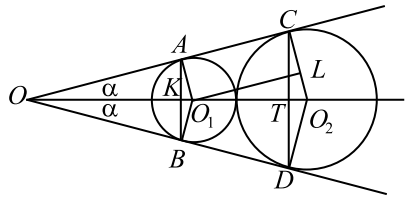


Рис. 61

Тогда по свойству соответственных углов при параллельных прямых OC и O_1L и секущей OO_2 $\angle LO_1O_2 = \alpha$. Но $O_1O_2 = 2 + 6 = 8$, а $LO_2 = 6 - 2 = 4$. Поэтому $\sin\alpha = \dfrac{LO_2}{O_1O_2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Так как α — острый угол, то $\alpha = 30^0$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что $\dfrac{AO_1}{OA} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OA = \dfrac{AO_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$,

$OK = OA \cdot \cos\alpha = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Аналогично $OC = \dfrac{CO_2}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{6}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6\sqrt{3}$.

В $\triangle KOC$ по теореме косинусов (см. рис. 60)

$KC^2 = OK^2 + OC^2 - 2 \cdot OK \cdot OC \cdot \cos\alpha = 9 + 108 - 2 \cdot 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 63$, $KC = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Ответ: $3\sqrt{7}$.

17. Обозначим через K сумму выданного кредита, а через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 — выплаты по кредиту в апреле, мае, июне, июле, августе и сентябре. Тогда по условию на конец марта текущий долг будет равен $1{,}05 \cdot K$. После уплаты суммы x_1 он станет равным $1{,}05 \cdot K - x_1$ и будет равен 80% от K, то есть $0{,}8 \cdot K$. Составляем первое уравнение: $1{,}05 \cdot K - x_1 = 0{,}8 \cdot K$.

Далее этот текущий долг опять увеличивается на 5%, и опять уплачивается сумма x_2, после чего останется 65% от K. Получаем второе уравнение:

$1{,}05 \cdot 0{,}8 \cdot K - x_2 = 0{,}65 \cdot K$.

Последующие уравнения будут иметь вид:

$1{,}05 \cdot 0{,}65 \cdot K - x_3 = 0{,}45 \cdot K$;

$1{,}05 \cdot 0{,}45 \cdot K - x_4 = 0{,}3 \cdot K$;

$1{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot K - x_5 = 0{,}2 \cdot K$;

$1{,}05 \cdot 0{,}2 \cdot K - x_6 = 0$.

Складывая полученные уравнения, имеем:

$1{,}05K \cdot (1 + 0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}45 + 0{,}3 + 0{,}2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) =$
$= K \cdot (0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}45 + 0{,}3 + 0{,}2)$.

Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = K \cdot (1{,}05 + 0{,}05 \cdot (0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}45 + 0{,}3 + 0{,}2)) =$
$= K \cdot (1{,}05 + 0{,}05 \cdot 2{,}4) = K \cdot (1{,}05 + 0{,}12) = K \cdot 1{,}17$.

Получаем, что сумма всех выплат больше суммы кредита на $0{,}17K$, то есть на 17% от K.

Ответ: 17.

18. Уравнение $(x-3)^2 = (y-1)^2$ равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x - 3 = y - 1, \\ x - 3 = -y + 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = x - 2, \\ y = -x + 4. \end{array}\right.$$

Множество решений этой совокупности совпадает с множеством всех точек, лежащих на двух прямых: $y = x - 2$ и $y = -x + 4$ (см. рис. 62). Заметим, что эти прямые проходят через точку $(3; 1)$, так как система $\left\{\begin{array}{l} y = x - 2, \\ y = -x + 4 \end{array}\right.$ имеет единственное решение $(3; 1)$.

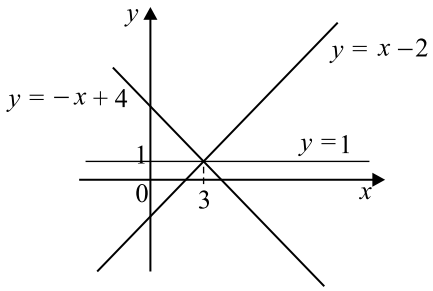


Рис. 62

При каждом значении a множеством решений второго уравнения системы $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 3a^2 - 8a + 9$ будет множество всех точек окружности с центром в точке $(a; 1)$, лежащей на прямой $y = 1$, и радиусом $\sqrt{3a^2 - 8a + 9}$ (заметим, что $3a^2 - 8a + 9 > 0$ для любого a).

Указанные окружности будут иметь ровно три общие точки с парой указанных выше пересекающихся прямых в том и только том случае, когда окружность проходит через точку пересечения этих прямых (см. рис. 63).

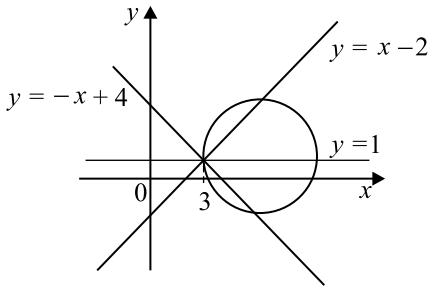


Рис. 63

В таком случае точка $(3; 1)$ лежит на окружности, значит, верно равенство
$(3 - a)^2 + (1 - 1)^2 = 3a^2 - 8a + 9$.
Отсюда получаем: $9 - 6a + a^2 = 3a^2 - 8a + 9$; $2a^2 - 2a = 0$;
$2a \cdot (a - 1) = 0$; $a = 0$ или $a = 1$.
Ответ: $0; 1$.

19. а) При $n = 1$ строка ответов состоит из 7 клеток, в каждую из которых записывается 1 или 0. Выясним, каким числом способов можно заполнить эту строку. Первую клетку из семи можно заполнить 2 способами (записать в неё 1 или 0). Если первая клетка уже заполнена, то вторую клетку также можно заполнить 2 способами. Значит, первые две клетки можно заполнить 4 способами ($2 \cdot 2 = 2^2$). Если первые две клетки уже заполнены, то третью клетку можно опять заполнить 2 способами. Значит, три клетки можно заполнить 8 способами ($2^2 \cdot 2 = 2^3$). Рассуждая аналогично, получаем, что 7 клеток можно заполнить 2^7 способами, $2^7 = 128$. Количество всех возможных различных результатов равно 128.

б) При $n = 2$ строка ответов состоит из 11 клеток, в каждую из которых записывается 1 или 0. Так как в средней клетке в указанных карточках уже записана 1, а в симметричные относительно неё клетки записываются одинаковые числа, то для заполнения всех 11 клеток надо заполнить лишь 5 первых клеток. Пять последних будут им попарно симметричны относительно средней клетки, и заполняются они одинаково. Из пункта а) следует, что таких возможностей $2^5 = 32$. Количество всех возможных «особенных» результатов при $n = 2$ равно 32.

в) Покажем, что число всех различных одновременно «особенных» и «удовлетворительных» результатов при произвольном значении n равно 4^n. Действительно, по условию в средней клетке (её номер $2n + 2$) содержится 1. Обозначим через m количество единиц в первых $2n + 1$ клетках, расположенных левее средней клетки. Тогда в этих клетках будет $2n + 1 - m$ нулей. Общее число единиц во всём «особенном» результате будет равно $2m+1$, а общее число нулей равно $2(2n+1-m) = 4n-2m+2$. По условию для «удовлетворительного» результата выполняется неравенство: $2m+1 > 4n-2m+2$, $4m > 4n+1$, $m > n + \frac{1}{4}$, $m \geqslant n + 1$, так как m является натуральным числом. Заметим также, что $m \leqslant 2n + 1$.

Для решения задачи остаётся посчитать количество всех последовательностей, состоящих из нулей и елиниц, в которых единиц больше.

Рассмотрим произвольную последовательность длиной $(2n+1)$, состоящую из нулей и единиц. Всего таких последовательностей 2^{2n+1} (см. решение пункта а)). Так как число $(2n+1)$ нечётно, то нулей и единиц не может быть поровну, то есть либо нулей больше, либо единиц.

Докажем, что количество последовательностей, в которых единиц больше, равно количеству последовательностей, в которых больше нулей. Для этого каждой последовательности длины $(2n+1)$, в которой преобладают единицы, поставим в соответствие последовательность длины $(2n+1)$ с преобладанием нулей, заменив в исходной последовательности все единицы нулями, а нули — единицами. Например, последовательности 11001 будет соответствовать 00110.

Отсюда количество последовательностей с преобладанием единиц равно $\dfrac{2^{2n+1}}{2} = 4^n$.

г) Решим неравенство $4^n \leqslant 1500$. Заметим, что $4^5 = 1024 < 1500$, а $4^6 = 4096 > 1500$. Значит, $n \leqslant 5$. Наибольшее значение n равно 5.

Ответ: а) 128; б) 32; в) 4^n; г) $n = 5$.

Решение варианта 12

1. 1 дюйм = 2,54 см; 58 дюймов= $58 \cdot 2{,}54$ см= 147,32 см $\approx$ 147 см.

Ответ: 147.

2. На оси абсцисс выбираем отрезок, соответствующий дате 27 июля с 0:00 часов до 24:00 часов. На этом отрезке найдём точку с наименьшей ординатой. По рисунку видим, что эта ордината равна 14.

Ответ: 14.

3. Проведём высоту CH параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$. $AD = 5$, $CH = 5$, $S_{ABCD} = 5 \cdot 5 = 25$ (см. рис. 64).

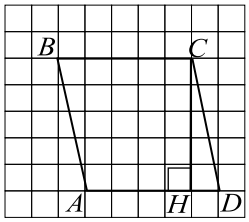


Рис. 64

Ответ: 25.

4. Обозначим через A событие «в автобусе окажется меньше 10 пассажиров» и через B событие «число пассажиров будет от 10 до 14». Они несовместны, и их объединением является событие «в автобусе окажется меньше 15 пассажиров», поэтому сумма вероятностей событий A и B равна вероятности события $A \cup B$, то есть $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Искомая вероятность равна $P(B) = 0{,}64 - 0{,}46 = 0{,}18$.

Ответ: 0,18.

5. $\dfrac{x+109}{5+2x}=\dfrac{-2}{1}$, при $x\neq -2{,}5$ получим: $x+109=-2(5+2x)$, $5x=-119$, $x=-23{,}8$.

Ответ: $-23{,}8$.

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне ($S=ah_a$). Найдём высоты параллелограмма: $h_1=160:10=16$, $h_2=160:20=8$. Бóльшая высота этого параллелограмма равна 16.

Ответ: 16.

7. Согласно определению первообразной выполняется равенство: $F'(x)=f(x)$. Поэтому уравнение $f(x)=0$ можно записать в виде $F'(x)=0$. Так как на рисунке изображён график функции $y=F(x)$, то надо найти те точки промежутка $[-3;4]$, в которых производная функции $F(x)$ равна нулю. Из рисунка видно, что это будут абсциссы экстремальных точек (максимума или минимума) графика $F(x)$. Их на указанном промежутке ровно 7 (четыре точки минимума и три точки максимума).

Ответ: 7.

8. Из рисунка видно, что, с одной стороны, диаметр шара является диаметром окружности основания цилиндра, а с другой стороны, является высотой цилиндра. Пусть радиус шара равен R, тогда его диаметр равен $2R$, значит, высота цилиндра H равна $2R$. Находим объём цилиндра: $V_{\text{цил.}}=S_{\text{осн.}}\cdot H=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$. По условию $66=2\pi R^3$. Отсюда $\pi R^3=33$. Так как $V_{\text{шара}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, то искомый объём равен $\dfrac{4}{3}\cdot 33=44$.

Ответ: 44.

9. $\dfrac{3\sqrt[12]{m^2}\cdot\sqrt[12]{m}}{\sqrt[4]{m}}=\dfrac{3\sqrt[12]{m^3}}{\sqrt[4]{m}}=\dfrac{3\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{m}}=3$.

Ответ: 3.

10. Решим неравенство $F_A\leqslant 141\,750$;

$4{,}2\cdot 1000\cdot 10\cdot r^3\leqslant 141\,750$; $42r^3\leqslant 141{,}75$; $r^3\leqslant 3{,}375$; $r^3\leqslant\dfrac{27}{8}$. $r\leqslant\dfrac{3}{2}$.

Максимальный радиус аппарата равен 1,5 метрам.

Ответ: 1,5.

11. Обозначим массу первого сплава через x кг. Тогда масса второго сплава $(x+1)$ кг. Содержание олова в первом сплаве равно $0{,}12x$ кг, во втором сплаве — $0{,}36(x+1)$ кг. Третий сплав имеет массу $x+x+1=2x+1$ (кг), и в нём содержание олова равно $(2x+1)\cdot 0{,}25=0{,}5x+0{,}25$ (кг).

Составим и решим уравнение: $0{,}12x+0{,}36(x+1)=0{,}5x+0{,}25$,
$12x+36(x+1)=50x+25$, $11=2x$, $x=5{,}5$ (кг).
Третий сплав имеет массу $2\cdot 5{,}5+1=12$ (кг).

Ответ: 12.

12. Исходная функция определена при $x\neq 0$. Тогда производная исходной функции $y'(x)=1-\dfrac{36}{x^2}$. Найдём нули производной: $y'(x)=0$ при $\dfrac{36}{x^2}=1$, $x^2=36$, $x=\pm 6$. Исследуемому промежутку принадлежит только значение $x=-6$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 65).

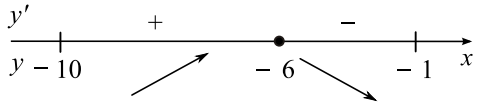


Рис. 65

Из рисунка видно, что функция $y = x + \dfrac{36}{x} + 10$ возрастает на промежутке $[-10;\ -6]$ и убывает на промежутке $[-6;\ -1]$. Наибольшее значение достигается при $x = -6$ и равно $y(-6) = -6 + \dfrac{36}{-6} + 10 = -2$.

Ответ: -2.

13. Так как $\sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{6}$, то $\sin^2\dfrac{\pi}{3} = \cos^2\dfrac{\pi}{6}$, значит, заданное уравнение равносильно уравнению $\cos^2 x = \cos^2 2x$, которое, в свою очередь, равносильно уравнению $\cos^2 x - \cos^2 2x = 0$.

Но $\cos^2 x - \cos^2 2x = (\cos x - \cos 2x) \cdot (\cos x + \cos 2x)$ и
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, поэтому уравнение примет вид
$(\cos x - (2\cos^2 x - 1)) \cdot (\cos x + (2\cos^2 x - 1)) = 0$,
$(2\cos^2 x - \cos x - 1) \cdot (2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$.

Тогда либо $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, либо $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно $\cos x$, получаем: $(\cos x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$. Поэтому либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Если $\cos x = 1$, то $x = 2k\pi$, $k \in Z$. Если $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, то $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2s\pi$, $s \in Z$.

Аналогично, решая второе уравнение, получаем либо $\cos x = -1$, либо $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Если $\cos x = -1$, то корни $x = \pi + 2m\pi$, $m \in Z$. Если $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Объединим полученные решения:

$x = m\pi$, $m \in Z$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + s\pi$, $s \in Z$.

б) Выберем корни, которые попали в заданный промежуток, с помощью числовой окружности (см. рис. 66).

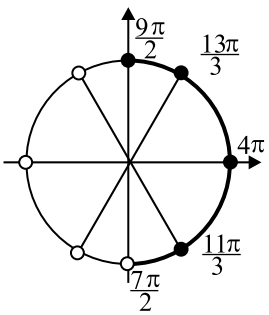


Рис. 66

Получим: $x_1 = \dfrac{11\pi}{3}$, $x_2 = 4\pi$, $x_3 = \dfrac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $m\pi$, $m \in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + s\pi$, $s \in Z$; б) $\dfrac{11\pi}{3}$, 4π, $\dfrac{13\pi}{3}$.

14. а) Рассмотрим рисунок 67.

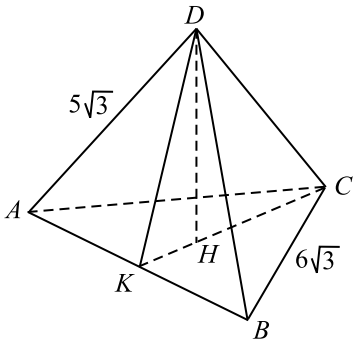


Рис. 67

Так как все боковые рёбра наклонены под одним и тем же углом к основанию, то основание высоты пирамиды (на рис. 67 это точка H) является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Но треугольник ABC — правильный, поэтому H является точкой пересечения высот (а значит, и медиан). Отсюда следует, что $AB \perp CK$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AB и ребро DC, будет плоскость KDC.

По условию боковые рёбра пирамиды равны, поэтому треугольник ABD равнобедренный, DK является его медианой, значит, и высотой. Поэтому $AB \perp DK$. Получаем, что AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости KDC, поэтому $AB \perp KDC$.

б) Проведём в треугольнике KDC высоту KT (см. рис. 68). Тогда, согласно доказанному в пункте а), $AB \perp KT$. Значит, KT является общим перпендикуляром к прямым AB и CD, а длина отрезка KT является расстоянием между прямыми AB и CD.

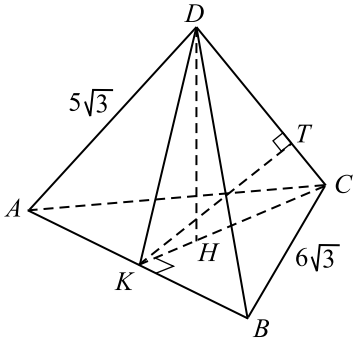


Рис. 68

В равностороннем треугольнике ABC высота $KC = AC \cdot \cos 30^0 =$

$= 6\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9$, $KH = \dfrac{1}{3}KC = 3$.

В прямоугольном треугольнике ADK

$AK = \frac{1}{2}AB = 3\sqrt{3}$,

$KD = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике DHK

$DH = \sqrt{KD^2 - KH^2} = \sqrt{48 - 9} = \sqrt{39}$.

$2 \cdot S_{KDC} = KC \cdot DH = KT \cdot DC$, $KT = \frac{KC \cdot DH}{DC} = \frac{9 \cdot \sqrt{39}}{5\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{13}}{5}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{13}}{5}$.

15. ОДЗ неравенства является множество всех решений системы

$\begin{cases} x^2 - x > 0, \\ x^2 - x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x > 0, \\ x^2 - x - 1 \neq 0. \end{cases}$

$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup$

$\cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Перейдём в неравенстве к логарифмам по основанию 2.

$$\frac{1}{\frac{\log_2 0{,}5}{\log_2(x^2-x)}} + \frac{1}{\frac{\log_2 0{,}25}{\log_2(x^2-x)}} + \frac{1}{\frac{\log_2 4}{\log_2(x^2-x)}} \geqslant -1,$$

$$\frac{\log_2(x^2-x)}{-1} + \frac{\log_2(x^2-x)}{-2} + \frac{\log_2(x^2-x)}{2} \geqslant -1,$$

$\log_2(x^2 - x) \cdot (-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \geqslant -1$, $-\log_2(x^2 - x) \geqslant -1$, $\log_2(x^2 - x) \leqslant 1$.

$\log_2(x^2 - x) \leqslant \log_2 2$, $x^2 - x \leqslant 2$, $x^2 - x - 2 \leqslant 0$.

Находим корни квадратного трёхчлена $x^2 - x - 2$:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, поэтому множеством решений неравенства будет множество $[-1; 2]$.

Так как $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ и $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, то множеством решений неравенства будет множество $\left[-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$.

Ответ: $\left[-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$.

16. а) Рассмотрим рисунок 69. На нём O_1 и O_2 — центры окружностей (по свойству вписанной в угол окружности точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle AOB$), K и T — точки пересечения соответственно AB и CD с биссектрисой. O_1A и O_2C — радиусы окружностей, перпендикулярные касательной AC.

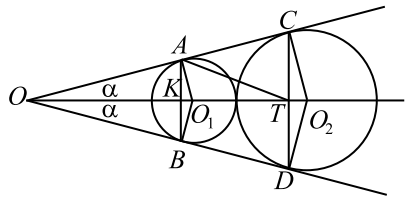


Рис. 69

$\triangle O_2CO = \triangle O_2DO$ по общей гипотенузе и острому углу, поэтому $OC = OD$. Таким образом, треугольник COD является равнобедренным, и биссектриса OT угла O является высотой и медианой, поэтому точка T является серединой отрезка CD. Это и означает, что прямая CD перпендикулярна биссектрисе $\angle COD$.

б) Пусть $\angle COO_2$ равен α. Проведём через O_1 прямую O_1L, параллельную AC (см. рис. 70).

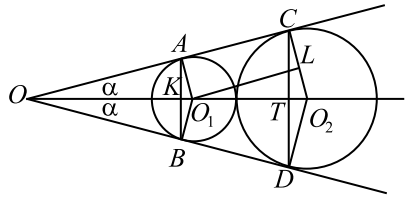


Рис. 70

Тогда по свойству соответственных углов при параллельных прямых OC и O_1L и секущей OO_2 $\angle LO_1O_2 = \alpha$. Но $O_1O_2 = 3 + 9 = 12$, а $LO_2 = 9 - 3 = 6$. Поэтому $\sin\alpha = \dfrac{LO_2}{O_1O_2} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$. Так как α — острый угол, то $\alpha = 30^0$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что $\dfrac{AO_1}{OA} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OA = \dfrac{AO_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}$. Аналогично

$\dfrac{CO_2}{OC} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OC = \dfrac{CO_2}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{9}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 9\sqrt{3}$, $OT = OC \cdot \cos\alpha = 9\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27}{2}$.

По теореме косинусов в $\triangle AOT$ (см. рис. 69)

$$AT^2 = OA^2 + OT^2 - 2 \cdot OA \cdot OT \cdot \cos\alpha = 27 + \frac{729}{4} - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{351}{4},$$

$$AT = \frac{\sqrt{351}}{2} = \frac{3\sqrt{39}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{39}}{2}$.

17. Обозначим через K сумму выданного кредита, а через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 — выплаты по кредиту в июле, августе, сентябре, октябре, ноябре и декабре. Тогда по условию на конец июня текущий долг будет равен $1{,}07 \cdot K$. После уплаты суммы x_1 он станет равным $1{,}07 \cdot K - x_1$ и будет равен 85% от K, то есть $0{,}85 \cdot K$. Составляем первое уравнение:

$1,07 \cdot K - x_1 = 0,85 \cdot K$.

Далее этот текущий долг опять увеличивается на 7%, и опять уплачивается сумма x_2, после чего останется 65% от K. Получаем второе уравнение:

$1{,}07 \cdot 0{,}85 \cdot K - x_2 = 0{,}65 \cdot K$.

Последующие уравнения будут иметь вид:

$1{,}07 \cdot 0{,}65 \cdot K - x_3 = 0{,}4 \cdot K$;

$1{,}07 \cdot 0{,}4 \cdot K - x_4 = 0{,}3 \cdot K$;

$1{,}07 \cdot 0{,}3 \cdot K - x_5 = 0{,}2 \cdot K$;

$1{,}07 \cdot 0{,}2 \cdot K - x_6 = 0$.

Складывая полученные уравнения, имеем:

$1{,}07K \cdot (1 + 0{,}85 + 0{,}65 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) =$
$= K \cdot (0{,}85 + 0{,}65 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2)$.

Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = K \cdot (1{,}07 + 0{,}07 \cdot (0{,}85 + 0{,}65 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2)) =$
$= K \cdot (1{,}07 + 0{,}07 \cdot 2{,}4) = K \cdot (1{,}07 + 0{,}168) = K \cdot 1{,}238$.

Получаем, что сумма всех выплат больше суммы кредита K на $0{,}238K$. Так как $0,238 = \dfrac{23{,}8}{100}$, то сумма всех выплат на 23,8% больше самого кредита.

Ответ: 23,8.

18. Уравнение $(x+1)^2 = (y-2)^2$ равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+1 = y-2, \\ x+1 = -y+2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = x+3, \\ y = -x+1. \end{array}\right.$$

Множество решений этой совокупности совпадает с множеством всех точек, лежащих на двух прямых: $y = x + 3$ и $y = -x + 1$ (см. рис. 71). Заметим, что эти прямые проходят через точку $(-1; 2)$, так как система $\left\{\begin{array}{l} y = x+3 \\ y = -x+1 \end{array}\right.$ имеет единственное решение $(-1; 2)$ (см. рис. 71).

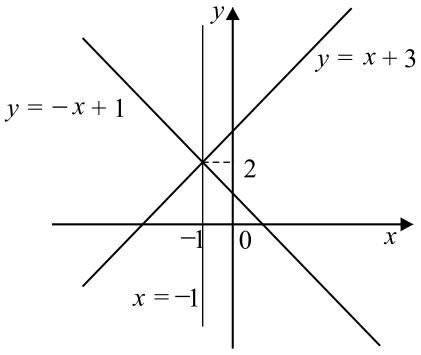


Рис. 71

При каждом значении a множеством решений второго уравнения системы $(x+1)^2 + (y-a)^2 = 3a^2 - 2a + 4$ будет множество всех точек окружности с центром в точке $(-1; a)$, лежащей на прямой $x = -1$, и радиусом $\sqrt{3a^2 - 2a + 4}$ (заметим, что $3a^2 - 2a + 4 > 0$ для любого a).

Указанные окружности будут иметь ровно три общие точки с парой указанных выше пересекающихся прямых в том и только том случае, когда окружности проходят через точку пересечения прямых (см. рис. 72).

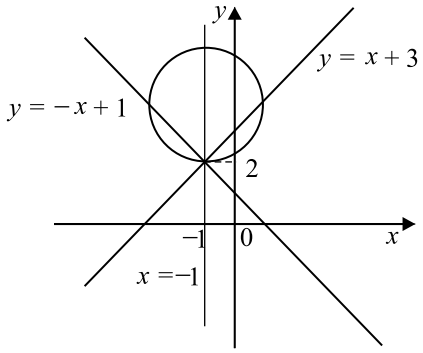


Рис. 72

В таком случае точка $(-1;2)$ лежит на окружности, значит, верно равенство $(-1+1)^2+(2-a)^2=3a^2-2a+4$.

Отсюда получаем: $4-4a+a^2=3a^2-2a+4$; $2a^2+2a=0$; $2a\cdot(a+1)=0$; $a=0$ или $a=-1$.

Ответ: $-1;0$.

19. а) При $n=3$ строка ответов состоит из 11 клеток, в каждую из которых записывается 1 или 0. Выясним, каким числом способов можно заполнить эту строку. Первую клетку из 11 можно заполнить 2 способами (записать в неё 1 или 0). Если первая клетка уже заполнена, то вторую клетку также можно заполнить 2 способами. Значит, первые две клетки можно заполнить 4 способами ($2\cdot 2=2^2$). Если первые две клетки уже заполнены, то третью клетку можно опять заполнить 2 способами. Значит, три клетки можно заполнить 8 способами ($2^2\cdot 2=2^3$). Рассуждая аналогично, получаем, что 11 клеток можно заполнить 2^{11} способами, $2^{11}=2048$. При $n=3$ число возможных результатов равно 2048.

б) При $n=2$ строка ответов состоит из 7 клеток, в каждую из которых записывается 1 или 0. Так как в средней клетке строки уже записана 1, а в симметричные относительно неё клетки записываются одинаковые числа, то для заполнения всех 7 клеток надо заполнить лишь 3 первые клетки. Последние три будут им попарно симметричны относительно средней клетки, и заполняются они одинаково. Из пункта а) следует, что таких возможностей $2^3=8$. Число возможных различных «исключительных» результатов при $n=2$ равно 8.

в) Покажем, что число всех различных одновременно «уникальных» и «проходных» результатов при произвольном значении n равно 4^{n-1}. Так как $n>1$, то $n=k+1\,(k\in Z)$, тогда $4n-1=4k+3$. По условию в средней клетке (её номер $2k+2$) содержится 1. Обозначим через m количество единиц в первых $2k+1$ клетках, расположенных левее средней клетки. Тогда в этих клетках будет $2k+1-m$ нулей. Общее число единиц во всём «исключительном» результате будет равно $2m+1$, а общее число нулей равно $2(2k+1-m)=4k-2m+2$. По условию для «проходного» результата выполняется неравенство: $2m+1>4k-2m+2$, $4m>4k+1$, $m>k+\dfrac{1}{4}$, $m\geqslant k+1$, так как m является

натуральным числом. Заметим также, что $m \leqslant 2k+1$. При каждом указанном значении m число различных результатов равно C_{2k+1}^{m}. Тогда искомое число результатов равно: $C_{2k+1}^{k+1} + C_{2k+1}^{k+2} + \ldots + C_{2k+1}^{2k} + C_{2k+1}^{2k+1}$. Известно, что у последовательности биномиальных коэффициентов: $C_{2k+1}^{0}, C_{2k+1}^{1}, \ldots, C_{2k+1}^{k-1}, C_{2k+1}^{k}, C_{2k+1}^{k+1}, C_{2k+1}^{k+2}, \ldots, C_{2k+1}^{2k}, C_{2k+1}^{2k+1}$, коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны. Поэтому сумма $C_{2k+1}^{k+1}+C_{2k+1}^{k+2}+\ldots+C_{2k+1}^{2k}+C_{2k+1}^{2k+1}$, равна половине суммы всех коэффициентов. Но сумма всех биномиальных коэффициентов, как известно, равна 2^{2k+1}. Значит, искомая сумма равна $\dfrac{2^{2k+1}}{2} = 2^{2k} = 4^{n-1}$.

г) Решим неравенство $4^{n-1} \leqslant 1700$. Заметим, что $4^5 = 1024 < 1700$, а $4^6 = 4096 > 1700$. Поэтому $n-1 \leqslant 5$, $n \leqslant 6$. Наибольшее значение n равно 6.

Ответ: а) 2048; б) 8; в) 4^{n-1}; г) 6.

Решение варианта 14

1. Клиент заплатил за бензин $1000 - 28{,}4 = 971{,}6$ (рублей).
$971{,}6 : 34{,}7 = 28$ литров бензина было залито в бак.

Ответ: 28.

2. Находим точку с ординатой 6 (такая точка одна), затем, с помощью рисунка, соответствующую ей абсциссу, которая равна 17, то есть 17 февраля выпало 6 мм осадков.

Ответ: 17.

3. Диагонали прямоугольника равны. Диагональ AC найдём как гипотенузу прямоугольного треугольника ADC с катетами $AD = 3$, $CD = 4$: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см. рис. 73).

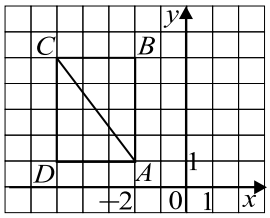


Рис. 73

Ответ: 5.

4. Найдём, сколько выступлений запланировано на третий день конкурса. На последний, четвёртый, день запланировано 5 выступлений. Остаются ещё $50 - 5 = 45$ выступлений, которые распределяются поровну между оставшимися тремя днями, поэтому в третий день запланировано $45 : 3 = 15$ выступлений.

Будем считать экспериментом выбор порядкового номера выступления хора из гимназии. Всего таких равновозможных исходов 50 (количество номеров). Благоприятствуют указанному событию 15 исходов (15 номеров в списке выступлений). Искомая вероятность равна $15 : 50 = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

5. $(\sqrt{3x+88})^2 = (-x)^2$, $3x + 88 = x^2$, $x^2 - 3x - 88 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 19}{2}$, $x_1 = 11$, $x_2 = -8$.

Делаем проверку.

$\sqrt{3\cdot(-8)+88}=-(-8)$, это верно, значит, $x=-8$ — корень уравнения.
$\sqrt{3\cdot 11+88}=-11$, это неверно, значит, $x=11$ не является корнем уравнения.

Ответ: -8.

6. Площадь треугольника можно найти как половину произведения двух его сторон на синус угла между ними. В заданном треугольнике площадь $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 14\cdot\sin 30^\circ=21$.

Ответ: 21.

7. Производная отрицательна в тех точках, которые принадлежат промежуткам убывания функции, если только касательные в них не горизонтальны.

Точками, удовлетворяющими сказанному, будут: x_1, x_4, x_5, x_6. Их оказалось 4.

Ответ: 4.

8. Пусть R — радиус основания первого сосуда, тогда $2R$ — радиус основания второго сосуда. По условию объём жидкости V в первом и втором сосуде один и тот же. Обозначим через H — уровень, на который поднялась жидкость во втором сосуде. Тогда $V=\pi R^2\cdot 20$, и $V=\pi(2R)^2H=4\pi R^2H$. Отсюда $\pi R^2\cdot 20=4\pi R^2H$, $20=4H$, $H=5$.

Ответ: 5.

9. $16a^7a^{15}:(8a^{11})^2=16a^{7+15}:(8^2a^{11\cdot 2})=\frac{16a^{22}}{64a^{22}}=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

10. Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 5,6 километра. Подставим в формулу $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$ значения $l=5{,}6$, $R=6400$:

$$5{,}6=\sqrt{\frac{6400\cdot h}{500}}=\sqrt{\frac{64\cdot h}{5}},\ \frac{56^2}{10^2}=\frac{64h}{5},\ h=2{,}45\ (\text{м}).$$

Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 6,4 километра.

$$6{,}4=\sqrt{\frac{6400\cdot h}{500}}=\sqrt{\frac{64\cdot h}{5}},\ \frac{64^2}{10^2}=\frac{64h}{5},\ h=3{,}2\ (\text{м}).$$

Найдём высоту, на которую нужно подняться наблюдателю: $3{,}2-2{,}45=0{,}75$ (м).

Ответ: 0,75.

11. В 2001 году число жителей посёлка выросло на 5%, то есть стало $74\,000\cdot 1{,}05=77\,700$ (чел.), а в 2002 году — на 10% по сравнению с 2001 годом, то есть число жителей посёлка стало $77\,700\cdot 1{,}1=85\,470$ человек.

Ответ: 85 470.

12. Найдём производную исходной функции, используя формулу производной произведения:

$y'=\Big((x-1)^2\Big)'(x+8)+(x-1)^2(x+8)'+(15)'=2(x-1)(x+8)+(x-1)^2=$
$=(x-1)(2x+16+x-1)=(x-1)(3x+15)=3(x-1)(x+5)$.

Отыщем нули производной: $y'(x)=0$; $(x-1)(x+5)=0$; $x_1=1$, $x_2=-5$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 74).

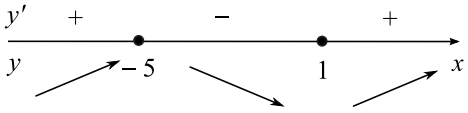


Рис. 74

Из рисунка видно, что $x = 1$ является единственной точкой минимума.

Ответ: 1.

13. а) $\dfrac{\sin 2x}{\cos(\pi + x)} = -\sqrt{2}$.

Зная, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$,

получим: $\dfrac{2\sin x \cos x}{-\cos x} = -\sqrt{2}$.

Учитывая, что $\cos x \neq 0$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, имеем:

$2\sin x = \sqrt{2}$,

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$-2\pi < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < -\dfrac{\pi}{2}$,

$-2 < \dfrac{1}{4} + 2n < -\dfrac{1}{2}$,

$-2 - \dfrac{1}{4} < 2n < -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}$,

$-\dfrac{9}{4} < 2n < -\dfrac{3}{4}$,

$-\dfrac{9}{8} < n < -\dfrac{3}{8}$,

$n = -1$.

При $n = -1$

$x = \dfrac{\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{4}$.

2. $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

$-2\pi < \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k < -\dfrac{\pi}{2}$,

$-2 < \dfrac{3}{4} + 2k < -\dfrac{1}{2}$,

$-2 - \dfrac{3}{4} < 2k < -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}$,

$-\dfrac{11}{4} < 2k < -\dfrac{5}{4}$,

$-\dfrac{11}{8} < k < -\dfrac{5}{8}$,

$k = -1$.

При $k = -1$

$x = \dfrac{3\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in Z$; б) $-\dfrac{7\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{4}$.

14. а) Так как призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ правильная, то $ABCD$ — квадрат и боковые грани — равные прямоугольники (см. рис. 75).

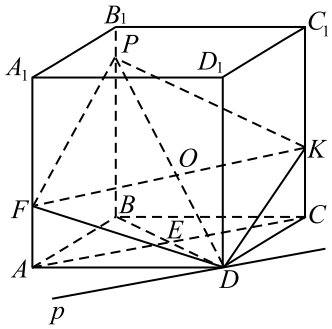


Рис. 75

Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D и K параллельно AC. Линия пересечения плоскости сечения и плоскости AA_1C_1 проходит через точку K и параллельна AC.

В плоскости ACC_1 через точку K проведём отрезок KF параллельно диагонали AC.

Так как грани A_1ADD_1 и B_1BCC_1 призмы параллельны, то по свойству параллельных плоскостей линии пересечения плоскости сечения и этих граней параллельны.

Проведём $PK \parallel FD$. Четырёхугольник $FPKD$ — искомое сечение.

б) Найдём угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Пусть плоскость сечения пересекает плоскость основания по некоторой прямой p, проходящей через точку D. $AC \parallel FK$, следовательно, $AC \parallel p$ (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой). Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, то $BD \perp AC$, а значит, $BD \perp p$. BD — проекция PD на плоскость ABC, поэтому $PD \perp p$ по теореме о трёх перпендикулярах. Следовательно, $\angle PDB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

$FK \parallel p$, значит, $FK \perp PD$.

В четырёхугольнике $FPKD$ имеем $FD \parallel PK$ и $KD \parallel FP$, значит, $FPKD$ — параллелограмм, а так как прямоугольные треугольники FAD и KCD равны по двум катетам ($AD = DC$ как стороны квадрата, $FA = KC$ как расстояния между параллельными прямыми AC и FK), то $FPKD$ — ромб. Отсюда $PD = 2OD$.

По условию $CK : KC_1 = 1 : 2$, тогда $KC = \dfrac{1}{3}CC_1 = \dfrac{4{,}5\sqrt{2}}{3} = 1{,}5\sqrt{2}$.

В $\triangle DKC$ по теореме Пифагора $KD^2 = DC^2 + KC^2$, $KD = \sqrt{3^2 + (1{,}5\sqrt{2})^2} = \sqrt{13{,}5}$.

$AC = 3\sqrt{2}$ как диагональ квадрата, $OK = EC = \dfrac{1}{2}AC$, $OK = 1{,}5\sqrt{2}$.

В $\triangle KOD$ по теореме Пифагора $OD^2 = KD^2 - OK^2$,

$OD = \sqrt{(\sqrt{13{,}5})^2 - (1{,}5\sqrt{2})^2} = 3$. $PD = 2OD = 6$.

В прямоугольном треугольнике PDB

$\cos\angle PDB = \dfrac{BD}{PD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\angle PDB = 45°$.

Ответ: $45°$.

15. $\log_{|x+4|}(16 + 14x - 2x^2) \geqslant 2$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 16 + 14x - 2x^2 > 0, \\ x + 4 \neq 0, \\ |x + 4| \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 7x - 8 < 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3, \\ x \neq -5; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 1)(x - 8) < 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3, \\ x \neq -5; \end{cases}$$

$x \in (-1; 8)$.

$\log_{|x+4|}(16 + 14x - 2x^2) \geqslant \log_{|x+4|}(x + 4)^2$,

$\log_{|x+4|}(16 + 14x - 2x^2) - \log_{|x+4|}(x + 4)^2 \geqslant 0$ (1).

На ОДЗ заменим полученное неравенство (1) равносильными неравенствами, применив дважды метод рационализации:

1) знак $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $(a - 1)(f - g)$,
2) знак $|f| - |g|$ совпадает со знаком $(f - g)(f + g)$.

Согласно 1: $(|x + 4| - 1)(16 + 14x - 2x^2 - x^2 - 8x - 16) \geqslant 0$,
$(|x + 4| - 1)(-3x^2 + 6x) \geqslant 0$.

Разделим обе части неравенства на -3.

$(|x + 4| - 1)(x^2 - 2x) \leqslant 0$,

Согласно 2: $(x + 4 - 1)(x + 4 + 1)x(x - 2) \leqslant 0$.
$x(x + 3)(x + 5)(x - 2) \leqslant 0$.

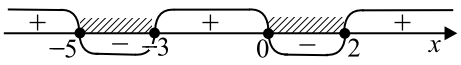


Рис. 76

$-5 \leqslant x \leqslant -3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ (см. рис. 76).

Учитывая ОДЗ, получим:

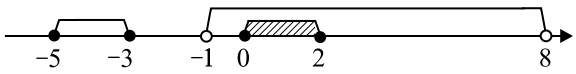


Рис. 77

$0 \leqslant x \leqslant 2$ (см. рис. 77).

Ответ: $[0; 2]$.

16. а) Пусть точка O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$ (см. рис. 78).

Биссектриса BD пересекает дугу MN в точке K, а отрезок MN в точке E. $BM = BN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, отсюда $\triangle MBN$ — равнобедренный, значит, биссектриса BE — медиана и высота. $\triangle KME = \triangle KNE$ по двум катетам ($ME = NE$, KE — общая сторона). Из равенства треугольников следует: $MK = NK$, а так как равные хорды стягивают равные дуги, то $\smile KM = \smile KN$.

Докажем, что K — центр вписанной окружности треугольника $\triangle MBN$.

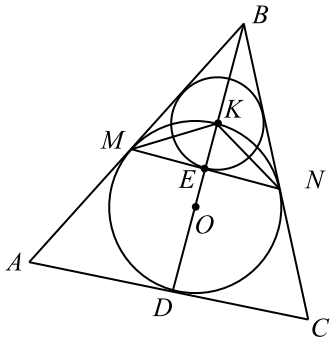


Рис. 78

$\angle KMN = \frac{1}{2} \smile NK$ как вписанный, $\angle KMB = \frac{1}{2} \smile MK$ как угол между касательной BM и хордой KM. $\smile MK = \smile NK$, значит, $\angle KMN = \angle KMB$, тогда MK — биссектриса угла NMB.

Отсюда следует, что K — точка пересечения BE и MK, то есть точка пересечения биссектрис $\triangle BMN$, а значит, центр вписанной окружности.

б) По доказанному в пункте а) центр вписанной окружности $\triangle BMN$ лежит на вписанной окружности $\triangle ABC$, следовательно, искомое расстояние равно радиусу вписанной окружности $\triangle ABC$.

Из формулы $S_{ABC} = p \cdot r$ следует, что $r = \frac{S_{ABC}}{p}$, где r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр.

1. Найдём площадь $\triangle ABC$:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 15\sqrt{7}$.

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

По условию $\triangle ABC$ остроугольный, поэтому

$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$.

$BC^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4}$, $BC = 8$.

2. Найдём $p = \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{10 + 12 + 8}{2} = 15$.

3. Расстояние между центрами окружностей $OK = r = \frac{15\sqrt{7}}{15} = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

17. Обозначим ежегодные выплаты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Так как текущий долг ежегодно увеличивается на 15%, то он будет составлять 115%, то есть 1,15 от оставшейся суммы долга.

Составим уравнения, которые соответствуют приведённой таблице.

1 год	$1\,500\,000 \cdot 1{,}15 - x_1 = 1\,200\,000$
2 год	$1\,200\,000 \cdot 1{,}15 - x_2 = 900\,000$
3 год	$900\,000 \cdot 1{,}15 - x_3 = 600\,000$
4 год	$600\,000 \cdot 1{,}15 - x_4 = 300\,000$
5 год	$300\,000 \cdot 1{,}15 - x_5 = 0$

Сложим левые и правые части уравнений:
$1{,}15(1\,500\,000 + 1\,200\,000 + 900\,000 + 600\,000 + 300\,000) -$
$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 1\,200\,000 + 900\,000 + 600\,000 + 300\,000.$

Пусть $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ — общая сумма выплат,
$4\,500\,000 \cdot 1{,}15 - Z = 3\,000\,000,$
$Z = 5\,175\,000 - 3\,000\,000 = 2\,175\,000,$
$2\,175\,000 - 1\,500\,000 = 675\,000$ (руб).

От суммы кредита переплата 675 000 рублей составляет $\dfrac{675\,000}{1\,500\,000} \cdot 100\% = 45\%$. Следовательно, общая сумма выплат на 45% больше суммы самого кредита.

Ответ: 45.

18. Построим график уравнения $y = \sqrt{-8 - 6x - x^2}$.
Преобразовав подкоренное выражение, получим: $y = \sqrt{1 - (x^2 + 6x + 9)}$,
$y = \sqrt{1 - (x+3)^2}$.

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 = 1 - (x+3)^2$, $(x+3)^2 + y^2 = 1$.

Если $y < 0$, точек, удовлетворяющих уравнению, нет.

Получилась полуокружность радиусом 1 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 79).

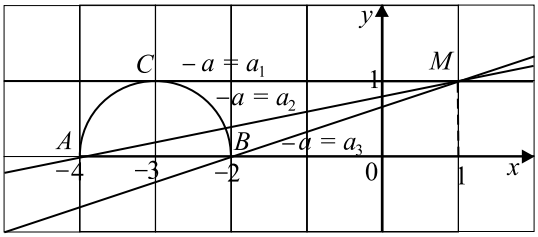


Рис. 79

Уравнение $y + ax = a + 1$ запишем в виде $y = -a(x-1) + 1$ — семейство прямых с угловым коэффициентом $-a$, проходящих через точку $M(1; 1)$.

Рассмотрим рисунок 79. Видно, что система имеет единственное решение, если:
1) прямая MC касается полуокружности, поэтому $-a = a_1 = 0$,
2) прямая и полуокружность имеют единственную общую точку, при этом $a_2 < -a \leqslant a_3$.

Найдём a_2 из условия, что прямая $y = a_2(x-1) + 1$ проходит через точку $A(-4; 0)$.

$a_2(-4-1) + 1 = 0 \;\; a_2 = \dfrac{1}{5}.$

Найдём a_3 из условия, что прямая $y = a_3(x-1) + 1$ проходит через точку $B(-2; 0)$.

$a_3(-2-1) + 1 = 0 \;\; a_3 = \dfrac{1}{3}.$

Имеем $\frac{1}{5} < -a \leqslant \frac{1}{3}$, значит, $-\frac{1}{3} \leqslant a < -\frac{1}{5}$.

Следовательно, система имеет единственное решение, если $-\frac{1}{3} \leqslant a < -\frac{1}{5}$ и $a = 0$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right); 0$.

19. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Пусть меньшее из чисел последовательности a, тогда второе число $7a$. Сумма членов $a + 7a = 8a$. По условию эта сумма равна 2745 и она должна делиться на 8. Но 2745 не делится на 8. Наше предположение неверно, следовательно, данная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, такой является последовательность:
305; $305 \cdot 7$; 305, то есть 305; 2135; 305 (мы рассмотрели последовательность a, $7a$, a с суммой $9a$).

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 8 (два соседних члена равны 1 и 7).

$2745 = 8 \cdot 343 + 1$, то есть $8 \cdot 344 > 2745$ и 344 пары быть не может. Таким образом, чисел меньше $344 \cdot 2$.

Значит, максимальное число членов последовательности $343 \cdot 2 + 1 = 687$.

В этом случае последовательность имеет вид: 1, 7, 1, 7, ..., 1.

Ответ: а) нет; б) да; в) 687.

Решение варианта 15

1. Клиент заплатил за бензин $1000 - 19{,}8 = 980{,}2$ (рублей).
$980{,}2 : 33{,}8 = 29$ литров бензина было залито в бак.

Ответ: 29.

2. Выбираем точку с ординатой 2 и наименьшей абсциссой. Видим, что её абсцисса равна 8. Значит, 8 февраля впервые выпало 2 мм осадков.

Ответ: 8.

3. Диагонали прямоугольника равны. Диагональ AC найдём как гипотенузу прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 6$, $CB = 8$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см. рис. 80).

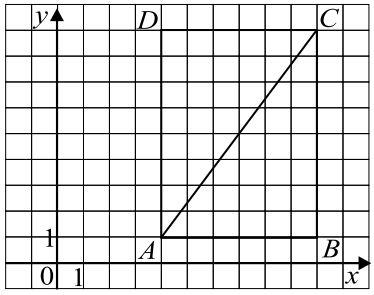


Рис. 80

Ответ: 10.

4. В этой задаче будем считать экспериментом выбор соперника Петра Дроздова. Исход — это соперник Петра Дроздова. Так как всего теннисистов 26, а сам с собой Пётр играть не может, то имеется $26 - 1 = 25$ равновероятных исходов. Благоприятный исход — соперник из Уфы. Таких благоприятных исходов $12 - 1 = 11$ (из числа игроков из Уфы исключаем самого Петра). Искомая вероятность равна $\frac{11}{25} = 0{,}44$.

Ответ: 0,44.

5. $\left(\sqrt{\frac{5}{3x-36}}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2,\ \frac{5}{3x-36} = \frac{1}{81},\ 3x - 36 = 5 \cdot 81,$
$3x = 441,\ x = 147.$

Ответ: 147.

6. Обозначим неизвестную боковую сторону заданного треугольника a. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. В заданном треугольнике площадь $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 150^\circ$ равна 324. Получаем: $\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2} = 324$, $a = \sqrt{324 \cdot 4} = 36$.

Ответ: 36.

7. Проводим касательные к графику функции в точках с указанными абсциссами. Определяем, под каким углом они наклонены к положительному направлению оси Ox. Как известно, значение тангенса указанного угла это и есть значение производной в указанных точках.

В точках -4 и -1 касательные наклонены под тупым углом, поэтому в этих точках значение производной отрицательно. В точках -5 и 1 касательные наклонены под острым углом, поэтому в этих точках значение производной положительно.

Учитывая, что касательная, проведённая к графику функции в точке $x = 1$, образует больший угол с положительным направлением оси Ox, то значение производной в этой точке наибольшее.

Ответ: 1.

8. Согласно условию уровень воды в сосуде до погружения детали равен 24 см, а после погружения детали равен 26 см. Тогда $V_{\text{воды}} = 1800 = S_{\text{осн.}} \cdot 24$. Поэтому $S_{\text{осн.}} = \frac{1800}{24} = 75$. Отсюда $V_{\text{воды + детали}} = S_{\text{осн.}} \cdot 26 = 75 \cdot 26 = 1950$. Следовательно, $V_{\text{детали}} = V_{\text{воды + детали}} - V_{\text{воды}} = 1950 - 1800 = 150$.

Ответ: 150.

9. $\frac{ab^{-3}}{5^3a^3 \cdot b^{-1}} \cdot \frac{4}{a^{-2}b^{-2}} = \frac{ab^{-3} \cdot 4}{125a^3 \cdot b^{-1} \cdot a^{-2}b^{-2}} = \frac{4ab^{-3}}{125a^{3-2}b^{-1-2}} =$
$= \frac{4ab^{-3}}{125a^1b^{-3}} = \frac{4}{125} = 0{,}032.$

Ответ: 0,032.

10. Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 5,6 километра. Подставим в формулу $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$ значения $l = 5{,}6$, $R = 6400$:

$$5{,}6 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}},\ \frac{56^2}{10^2} = \frac{64h}{5},\ h = 2{,}45\ (\text{м}).$$

Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 7,2 километра.

$$7{,}2 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}},\ \frac{72^2}{10^2} = \frac{64h}{5},\ h = 4{,}05\ (\text{м}).$$

Найдём высоту, на которую нужно подняться наблюдателю: $4{,}05 - 2{,}45 = 1{,}6$ (м). По условию высота ступеньки 20 см $= 0{,}2$ м. Найдём наименьшее количество ступенек, на которое нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 7,2 километров. $1{,}6 : 0{,}2 = 8$.

Ответ: 8.

11. В 2005 году прибыль составляла 12 000 рублей, каждый следующий год она увеличивалась на 110%, то есть становилась $210\% = 2{,}1$ от предыдущего года. Через три года она будет равна $12\,000 \cdot 2{,}1^3 = 111\,132$ рубля.

Ответ: 111 132.

12. Найдём производную исходной функции, используя формулу производной произведения:

$y' = \Big((x+9)^2\Big)'(x+12) + (x+9)^2(x+12)' - (14)' = 2(x+9)(x+12) + (x+9)^2 =$

$= (x+9)(2x+24+x+9) = (x+9)(3x+33) = 3(x+9)(x+11).$

Отыщем нули производной: $y'(x) = 0$; $(x+9)(x+11) = 0$; $x_1 = -11$, $x_2 = -9$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 81) на отрезке $[-11;\ 3]$. Из рисунка видно, что на отрезке $[-11;\ -9]$ исходная функция убывает, а на отрезке $[-9;\ 3]$ возрастает.

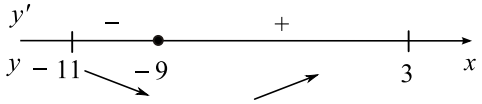


Рис. 81

Таким образом, наименьшее значение на отрезке $[-11;\ 3]$ достигается при $x = -9$ и равно $y(-9) = (-9+9)^2(-9+12) - 14 = -14$.

Ответ: -14.

13. $\dfrac{\sin 2x}{\sin(\pi - x)} = \sqrt{2}$.

а) Применим формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и формулу приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Уравнение примет вид: $\dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \sqrt{2}$.

Учитывая, что $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$, получим:

$2\cos x = \sqrt{2}$,

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$, с помощью числовой окружности (см. рис. 82).

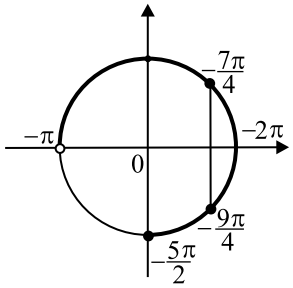


Рис. 82

$x_1 = -2\pi + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{7\pi}{4};$

$x_2 = -2\pi - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{9\pi}{4}.$

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $-\dfrac{9\pi}{4}; -\dfrac{7\pi}{4}$.

14. а) По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма, это означает, что основание $ABCD$ — квадрат и боковые грани — равные прямоугольники (см. рис. 83).

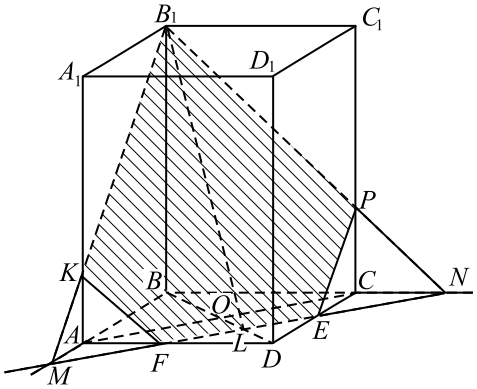


Рис. 83

Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B_1 и F параллельно AC.

В плоскости ABC через точку F проведём прямую FE, параллельную диагонали AC.

Прямая FE пересекает луч BA в точке M, а луч BC в точке N. Из точки B_1 в плоскости ABB_1 и в плоскости CBB_1 проведём лучи B_1M и B_1N. Эти лучи пересекут рёбра AA_1 и CC_1 в точках K и P соответственно. Пятиугольник FKB_1PE — искомое сечение.

б) Найдём угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Плоскость сечения пересекает плоскость основания по прямой MN, $MN \parallel AC$ по построению, $BD \perp AC$ как диагонали квадрата, MN пересекает BD в точке L, $BL \perp MN$, значит, $BL \perp FE$, BL — проекция наклонной B_1L на плоскость ABC, тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $B_1L \perp EF$, следовательно, $\angle BLB_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. В прямоугольном треугольнике BLB_1 $\operatorname{tg}\angle BLB_1 = \dfrac{BB_1}{BL}$. Найдём BL.

$\triangle AOD \sim \triangle FLD$ по первому признаку подобия ($\angle O = \angle L = 90°$, $\angle D$ — общий).

Из подобия следует $\dfrac{AD}{FD} = \dfrac{OD}{LD}$, $LD = \dfrac{FD \cdot OD}{AD}$.

Найдём FD и OD. По условию $AF : FD = 1 : 3$, значит,

$FD = \dfrac{3}{4}AD = \dfrac{3 \cdot 8}{4} = 6.$

$BD = 8\sqrt{2}$ как диагональ квадрата, $OD = \dfrac{1}{2}BD = 4\sqrt{2}$.

Тогда $LD = \dfrac{6 \cdot 4\sqrt{2}}{8} = 3\sqrt{2}$.

$BL = BD - LD = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$,

$\operatorname{tg} BLB_1 = \dfrac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $\angle BLB_1 = 60°$.

Ответ: $60°$.

15. $\log_{|x-2|}(4 + 7x - 2x^2) \geqslant 2$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 + 7x - 2x^2 > 0, \\ x - 2 \neq 0, \\ |x - 2| \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 < 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 0{,}5)(x - 4) < 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$x \in (-0{,}5; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$.

$\log_{|x-2|}(4 + 7x - 2x^2) \geqslant \log_{|x-2|}(x - 2)^2$,

$\log_{|x-2|}(4 + 7x - 2x^2) - \log_{|x-2|}(x - 2)^2 \geqslant 0$.

На ОДЗ заменим полученное неравенство равносильными неравенствами, применив дважды метод рационализации:

1) знак $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $(a - 1)(f - g)$,
2) знак $|f| - |g|$ совпадает со знаком $(f - g)(f + g)$.

Применяем 1: $(|x - 2| - 1)(4 + 7x - 2x^2 - x^2 + 4x - 4) \geqslant 0$,

$(|x - 2| - 1)(-3x^2 + 11x) \geqslant 0$.

Разделим обе части неравенства на -3.

$$(|x - 2| - 1)\left(x^2 - \frac{11x}{3}\right) \leqslant 0.$$

Применяем 2: $(x-2-1)(x-2+1)x\left(x-\frac{11}{3}\right)\leqslant 0$,

$x(x-3)(x-1)\left(x-\frac{11}{3}\right)\leqslant 0$ (см. рис. 84).

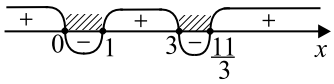


Рис. 84

$0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 3\leqslant x\leqslant\frac{11}{3}$.

Учитывая ОДЗ, получим (см. рис. 85):

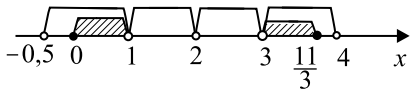


Рис. 85

$0\leqslant x<1;\ 3<x\leqslant\frac{11}{3}$.

Ответ: $[0;1)\cup\left(3;\frac{11}{3}\right]$.

16. а) Пусть точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 86). Тогда O лежит на биссектрисе угла A.

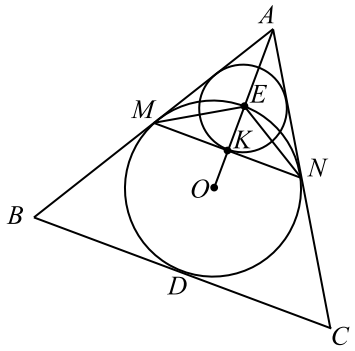


Рис. 86

Биссектриса AO пересекает дугу MN в точке E, а отрезок MN в точке K. $AM=AN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, отсюда $\triangle MAN$ — равнобедренный, значит, биссектриса AK является медианой и высотой. $\triangle EKM=\triangle EKN$ по двум катетам ($MK=KN$, EK — общая сторона). Из равенства треугольников следует: $EM=EN$, а так как равные хорды стягивают равные дуги, то $\smile EM=\smile EN$.

Докажем, что точка E — центр вписанной окружности треугольника MAN.

$\angle ANE=\frac{1}{2}\smile NE$ как угол между касательной AN и хордой EN.

$\angle MNE = \frac{1}{2} \smile ME$ как вписанный.

$\smile NE = \smile ME$, значит, $\angle ANE = \angle MNE$, тогда NE — биссектриса угла ANM.

Отсюда следует, что E — точка пересечения биссектрис углов A и N треугольника AMN, следовательно, E — центр вписанной окружности.

б) По доказанному выше центр вписанной окружности треугольника MAN — точка E — лежит на вписанной окружности треугольника ABC, следовательно, искомое расстояние равно радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

Из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r$ найдём радиус $r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}$.

Задача сводится к нахождению площади и периметра треугольника ABC.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Найдём AC.

$AM = AB - BM = 10 - 6 = 4$, $AN = AM = 4$,
$AC = AN + CN = 4 + 10 = 14$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 40\sqrt{3}$.

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

По условию $\triangle ABC$ остроугольный, поэтому $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{48}}{49}\right)^2} = \frac{1}{7}$.

$BC^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{1}{7}$, $BC^2 = 256$.

$BC = 16$, $P_{ABC} = 10 + 14 + 16 = 40$, $r = \frac{2 \cdot 40\sqrt{3}}{40} = 2\sqrt{3}$.

Расстояние между центрами $OE = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

17. Введём обозначения:

S — сумма кредита, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 — ежемесячные выплаты, начиная с июля.

Так как текущий долг ежемесячно увеличивается на 6%, то в конце каждого месяца он будет составлять 106%, то есть 1,06 от оставшейся суммы долга. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита.

на	20.07:	$1{,}06S - x_1 = 0{,}9S$,
на	20.08:	$1{,}06 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S$,
на	20.09:	$1{,}06 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S$,
на	20.10:	$1{,}06 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S$,
на	20.11:	$1{,}06 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S$,
на	20.12:	$1{,}06 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0$.

Сложим левые и правые части уравнений, получим:

$1{,}06S(1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) =$
$= S(0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5)$.

Обозначим $B = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ — общая сумма выплат.
$1{,}06S \cdot 4{,}5 - B = 3{,}5S$,
$B = S(4{,}77 - 3{,}5) = 1{,}27S$,
$B - S = 1{,}27S - S = 0{,}27S$, что составляет 27% от суммы кредита.

Следовательно, общая сумма выплат на 27% больше суммы самого кредита.

Ответ: 27.

18. Построим график уравнения $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$.
Преобразовав подкоренное выражение, получим:
$y = \sqrt{9 - (x^2 - 4x + 4)}$, $y = \sqrt{3^2 - (x-2)^2}$.

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 = 3^2 - (x-2)^2$, $(x-2)^2 + y^2 = 3^2$.

Если $y < 0$, точек, удовлетворяющих уравнению, нет.

Получилась полуокружность с центром в точке $(2; 0)$ радиусом 3, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 87).

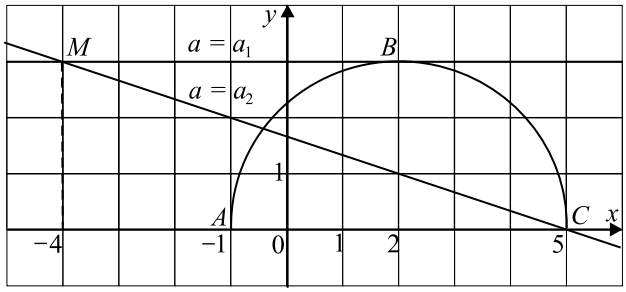


Рис. 87

Уравнение $y - ax = 4a + 3$ запишем в виде $y = a(x+4) + 3$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через точку $M(-4; 3)$.

Рассмотрим рисунок 87. Видно, что прямая и полуокружность имеют две общие точки, если $a_2 \leqslant a < a_1$. Прямая BM касается окружности, её угловой коэффициент равен 0, значит, $a_1 = 0$. Найдём a_2 из условия, что прямая MC $y = a(x+4) + 3$ проходит через точку $C(5; 0)$, то есть $y(5) = 0$.

$a(5+4) + 3 = 0$, $a = -\dfrac{1}{3}$, значит, $a_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Значит, система имеет ровно два решения при $-\dfrac{1}{3} \leqslant a < 0$.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

19. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Пусть меньшее из чисел последовательности a, тогда второе число $4a$. А сумма членов $a + 4a = 5a$. По условию эта сумма 1284 и она должна делиться на 5. Но 1284 не делится на 5. Наше предположение неверно, следовательно, данная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, такой является последовательность:
214; $214 \cdot 4$; 214, то есть 214; 856; 214.

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 5 (это возможно, если два соседних члена равны 4 и 1).

$1248 = 256 \cdot 5 + 4$, значит, может быть 256 таких пар и число 4.

Значит, максимальное число членов последовательности $256 \cdot 2 + 1 = 513$.

В этом случае последовательность имеет вид: 4, 1, 4, 1, ..., 4.

Ответ: а) нет; б) да; в) 513.

Решение варианта 16

1. Клиент заплатил за бензин $1000 - 13 = 987$ (рублей).
$987 : 32{,}9 = 30$ литров бензина было залито в бак.

Ответ: 30.

2. Выбираем точку с ординатой 1 и наименьшей абсциссой. Видим, что её абсцисса равна 5. Значит, 5 февраля впервые выпало 1 мм осадков.

Ответ: 5.

3. Диагонали прямоугольника равны. Диагональ AC найдём как гипотенузу прямоугольного треугольника ADC с катетами $AD = 6$, $CD = 8$: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см. рис. 88).

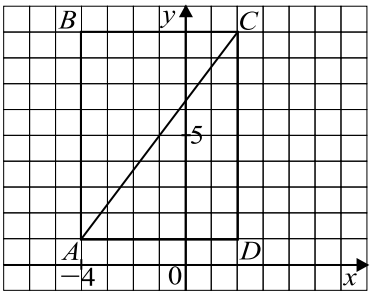


Рис. 88

Ответ: 10.

4. В этой задаче эксперимент — это выбор соперника Ивана Шилова. Так как всего боксёров 46, а сам с собой Иван Шилов встретиться не может, то имеется $46 - 1 = 45$ равновероятных исходов. Благоприятный исход — соперник из Ульяновска. Таких благоприятных исходов $10 - 1 = 9$ (из числа спортсменов из Ульяновска исключаем самого Ивана). Искомая вероятность равна $\frac{9}{45} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. $\left(\sqrt{\frac{45}{2x-31}}\right)^2 = 3^2$, $\frac{45}{2x-31} = 9$, $\frac{5}{2x-31} = 1$, $2x - 31 = 5$,
$x = 18$.

Ответ: 18.

6. Обозначим неизвестную боковую сторону заданного треугольника a. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. В за-

данном треугольнике площадь $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 150^\circ$ равна 121. Получаем: $\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2} = 121$, $a = \sqrt{121 \cdot 4} = 22$.

Ответ: 22.

7. Проводим касательные к графику функции в точках с указанными абсциссами. Определяем, под каким углом они наклонены к положительному направлению оси Ox. Как известно, значение тангенса указанного угла это и есть значение производной в указанных точках.

В точках -1 и 4 касательные наклонены под острым углом, поэтому в этих точках значение производной положительно. В точках -6 и 1 касательные наклонены под тупым углом, поэтому в этих точках значение производной отрицательно. Учитывая, что в точке $x = -6$ касательная наклонена под меньшим тупым углом (ближе к вертикальной прямой), значение производной в этой точке наименьшее.

Ответ: -6.

8. Пусть a — сторона основания первого сосуда, тогда $2a$ — сторона основания второго сосуда. По условию объём жидкости V в первом и втором сосуде один и тот же. Обозначим через H уровень, на который поднялась жидкость во втором сосуде. Тогда $V = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 40 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 40$, и $V = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$. Отсюда $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 40 = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$, $40 = 4H$, $H = 10$.

Ответ: 10.

9. $\frac{a^6b^{-4}}{2^3(a^4)^3 \cdot b^{-2}} \cdot \frac{3}{a^{-6}b^{-2}} = \frac{a^6b^{-4} \cdot 3}{8a^{4\cdot3} \cdot b^{-2} \cdot a^{-6}b^{-2}} = \frac{3a^6b^{-4}}{8a^{12-6} \cdot b^{-2-2}} = \frac{3a^6b^{-4}}{8a^6 \cdot b^{-4}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Ответ: 0,375.

10. Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 3,2 километра. Подставим в формулу $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ значения $l = 3{,}2$, $R = 6400$. $3{,}2 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}}$, $\frac{32^2}{10^2} = \frac{64h}{5}$, $h = 0{,}8$ (м).

Найдём высоту, на которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 8 километров. $8 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}}$, $8^2 = \frac{64h}{5}$, $h = 5$ (м).

Найдём высоту, на которую нужно подняться наблюдателю: $5 - 0{,}8 = 4{,}2$ (м). По условию высота ступеньки 20 см $= 0{,}2$ м. Найдём наименьшее количество ступенек, на которое нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 8 километров. $4{,}2 : 0{,}2 = 21$.

Ответ: 21.

11. В 2007 году прибыль составляла 8000 рублей, каждый следующий год она увеличивалась на 120%, то есть становилась 220% $= 2{,}2$ от предыдущего года. Через три года она будет равна $8000 \cdot 2{,}2^3 = 85\,184$ рубля.

Ответ: 85 184.

12. Найдём производную исходной функции, используя формулу производной произведения:
$y' = \Big((x+4)^2\Big)'(x+1) + (x+4)^2(x+1)' + (19)' = 2(x+4)(x+1) + (x+4)^2 =$
$= (x+4)(2x+2+x+4) = (x+4)(3x+6) = 3(x+4)(x+2).$

Отыщем нули производной: $y'(x) = 0$; $(x+4)(x+2) = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 89). Из рисунка видно, что на отрезке $[-5; -4]$ исходная функция возрастает, а на отрезке $[-4; -3]$ убывает.

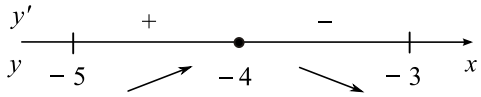


Рис. 89

Таким образом, наибольшее значение на отрезке $[-5; -3]$ достигается при $x = -4$ и равно $y(-4) = (-4+4)^2(-4+1) + 19 = 19$.

Ответ: 19.

13. а) $\dfrac{\sin 2x}{\sin\Big(\dfrac{3\pi}{2} + x\Big)} = 1.$

Зная, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $\sin\Big(\dfrac{3\pi}{2} + x\Big) = -\cos x$, получим: $\dfrac{2\sin x \cos x}{-\cos x} = 1$, где $\cos x \neq 0$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

$-2\sin x = 1$, $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\Big(3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\Big)$, с помощью числовой окружности (см. рис. 90).

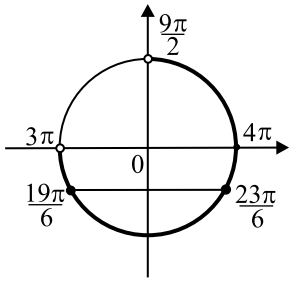


Рис. 90

$$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6},$$

$$x_2 = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in Z$; б) $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.

14. а) Так как призма правильная, то $ABCD$ — квадрат, а боковые грани — равные прямоугольники (см. рис. 91).

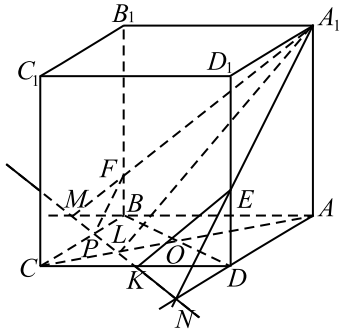


Рис. 91

Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 и K параллельно диагонали BD.

В плоскости ABC через точку K проведём прямую PK параллельно диагонали BD.

Лучи AD и AB пересекают прямую PK в точках N и M соответственно. Из точки A_1 в плоскости A_1AB и в плоскости A_1AD проведём лучи A_1M и A_1N. Эти лучи пересекут рёбра B_1B и D_1D в точках F и E соответственно. Многоугольник PFA_1EK — искомое сечение.

б) Найдём угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Плоскость сечения пересекает плоскость основания по прямой MN. $MN \parallel BD$ по построению, $AC \perp BD$ как диагонали квадрата, MN пересекает AC в точке L, отсюда $AL \perp MN$, значит, $AL \perp PK$. Так как призма правильная, то боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания, значит, $AA_1 \perp ABC$. AL — проекция наклонной A_1L на плоскость ABC, тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $A_1L \perp PK$. Следовательно, $\angle ALA_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. В прямоугольном треугольнике ALA_1 $\operatorname{tg}\angle ALA_1 = \frac{AA_1}{AL}$. Найдём AL. $AC = a\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата, $AC = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$. Так как $CK = KD$ по условию и $KP \parallel BD$, то по теореме Фалеса $CL = OL$, отсюда $AL = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

$\operatorname{tg}\angle ALA_1 = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle ALA_1 = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

15. $\log_{|x-5|}(2x^2-10x+8)\leqslant 2$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2-10x+8>0,\\ x-5\neq 0,\\ |x-5|\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+4>0,\\ x\neq 5,\\ x\neq 6,\\ x\neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-4)>0,\\ x\neq 5,\\ x\neq 6,\\ x\neq 4; \end{cases}$$

$x\in(-\infty;-1)\cup(4;5)\cup(5;6)\cup(6;\infty)$.

$\log_{|x-5|}(2x^2-10x+8)\geqslant \log_{|x-5|}(x-5)^2$,

$\log_{|x-5|}(2x^2-10x+8)-\log_{|x-5|}(x-5)^2\leqslant 0$.

На ОДЗ заменим неравенство равносильными неравенствами, применив дважды метод рационализации:

1) знак $\log_a f-\log_a g$ совпадает со знаком $(a-1)(f-g)$,

2) знак $|f|-|g|$ совпадает со знаком $(f-g)(f+g)$.

Применяем 1: $(|x-5|-1)(2x^2-10x+8-x^2+10x-25)\leqslant 0$,
$(|x-5|-1)(x^2-17)\leqslant 0$.

Применяем 2: $(x-5-1)(x-5+1)(x^2-17)\leqslant 0$.
$(x-6)(x-4)(x-\sqrt{17})(x+\sqrt{17})\leqslant 0$ (см. рис. 92).

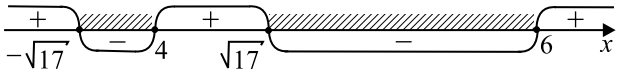


Рис. 92

$-\sqrt{17}\leqslant x\leqslant 4$, $\sqrt{17}\leqslant x\leqslant 6$.

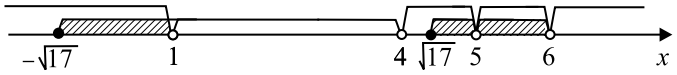


Рис. 93

Учитывая ОДЗ, получим (см. рис. 93): $-\sqrt{17}\leqslant x<1$; $\sqrt{17}\leqslant x<5$; $5<x<6$.

Ответ: $[-\sqrt{17};1)\cup[\sqrt{17};5)\cup(5;6)$.

16. а) Пусть точка O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$ (см. рис. 94). Тогда O лежит на биссектрисе угла B.

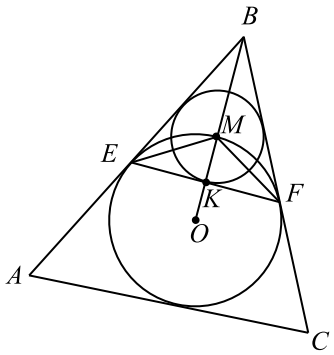


Рис. 94

Биссектриса BO пересекает дугу EF в точке M, а отрезок EF в точке K. $BE=BF$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, отсю-

да $\triangle BEF$ — равнобедренный, значит, биссектриса BK является медианой и высотой. $\triangle MKE = \triangle MKF$ по двум катетам ($EK = KF$, MK — общая сторона). Из равенства треугольников следует: $EM = MF$, а так как равные хорды стягивают равные дуги, то $\smile ME = \smile MF$.

Докажем, что M — центр окружности, вписанной в $\triangle BEF$.

$\angle MEF = \frac{1}{2} \smile MF$ как вписанный (см. рис. 94),

$\angle MEB = \frac{1}{2} \smile ME$ как угол между касательной BE и хордой ME, а так как $\smile MF = \smile ME$, то $\angle MEF = \angle MEB$, поэтому EM — биссектриса угла BEF.

Биссектрисы BK и EM прямоугольника BFE пересекаются в точке M, следовательно, M — центр вписанной окружности.

б) По доказанному в пункте а) центр вписанной окружности $\triangle BEF$ — точка M — лежит на вписанной окружности треугольника ABC, следовательно, искомое расстояние равно радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

В равнобедренном треугольнике BEF $BE = BF = 13$,
$EK = KF = 10 : 2 = 5$. В прямоугольном треугольнике BEK по теореме Пифагора $BK = \sqrt{BE^2 - EK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{12^2} = 12$.

$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot BK = \frac{1}{2} P_{BEF} \cdot r$, где r — радиус вписанной окружности;

$r = \dfrac{EF \cdot BK}{P_{ABC}} = \dfrac{10 \cdot 12}{13 + 13 + 10} = \dfrac{10}{3}$.

По условию $AB = BC$, значит, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BE}{BF} = 1$; $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BC}{BF}$. $\triangle BEF \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия ($\angle B$ — общий).

Из подобия следует: $\dfrac{MK}{MO} = k$ как радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники. $\dfrac{S_{BEF}}{S_{ABC}} = k^2 = \dfrac{4}{9}$, $k = \dfrac{2}{3}$.

$MO = \dfrac{MK}{k} = \dfrac{10 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 5$.

Ответ: 5.

17. Обозначим ежегодные выплаты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
Так как текущий долг ежегодно увеличивается на 10%, то в конце года он будет составлять 110%, то есть 1,1 от оставшейся суммы долга.
Составим уравнения, которые соответствуют приведённой таблице.

1 год	$2\,000\,000 \cdot 1{,}1 - x_1 = 1\,600\,000$
2 год	$1\,600\,000 \cdot 1{,}1 - x_2 = 1\,200\,000$
3 год	$1\,200\,000 \cdot 1{,}1 - x_3 = 800\,000$
4 год	$800\,000 \cdot 1{,}1 - x_4 = 400\,000$
5 год	$400\,000 \cdot 1{,}1 - x_5 = 0$

Сложим левые и правые части уравнений:
$1{,}1(2\,000\,000 + 1\,600\,000 + 1\,200\,000 + 800\,000 + 400\,000) -$
$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 1\,600\,000 + 1\,200\,000 + 800\,000 + 400\,000.$

Пусть $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ — общая сумма выплат,
$6\,000\,000 \cdot 1{,}1 - Z = 4\,000\,000,$
$Z = 2\,600\,000.$

Разность между общей суммой выплат и суммой кредита равна $2\,600\,000 - 2\,000\,000 = 600\,000$ (руб).

От суммы кредита 600 000 рублей составляют $\dfrac{600\,000}{2\,000\,000} \cdot 100\% = 30\%$. Следовательно, общая сумма выплат на 30% больше суммы самого кредита.

Ответ: 30.

18. Построим график уравнения $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$.
Преобразовав подкоренное уравнение, получим: $y = \sqrt{9 - (x^2 + 8x + 16)}$, $y = \sqrt{3^2 - (x+4)^2}$.

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 = 9 - (x+4)^2$, $(x+4)^2 + y^2 = 9$.

Если $y < 0$, точек, удовлетворяющих уравнению, нет.

Получилась полуокружность радиусом 3 с центром в точке $(-4; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 95).

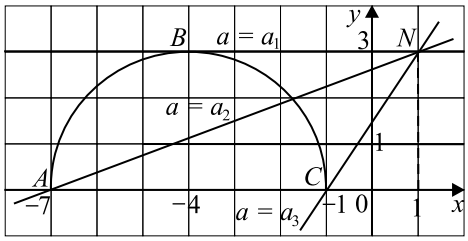


Рис. 95

Уравнение $y - ax = 3 - a$ запишем в виде $y = a(x-1) + 3$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через точку $N(1; 3)$.

Рассмотрим рисунок 95. Видно, что прямая и полуокружность имеют две общие точки, если:
1) прямая касается полуокружности, при этом $a = a_1 = 0$,
2) прямая и полуокружность имеют единственную общую точку, при этом $a_2 < a \leqslant a_3$.

Найдём a_2 из условия, что прямая $y = a(x-1) + 3$ проходит через точку $A(-7; 0)$.

$a(-7-1) + 3 = 0,\ a = \dfrac{3}{8}$, значит, $a_2 = \dfrac{3}{8}$.

Найдём a_3 из условия, что прямая $y = a(x-1) + 3$ проходит через точку $C(-1; 0)$.

$a(-1-1) + 3 = 0,\ a = \dfrac{3}{2}$, значит, $a_3 = \dfrac{3}{2}$.

Имеем $\dfrac{3}{8} < a \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Система имеет единственное решение, если $\frac{3}{8} < a \leqslant \frac{3}{2}$ и $a = 0$.

Ответ: $\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{2}\right]; 0$.

19. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Пусть a — меньшее из чисел этой последовательности, тогда второе число $6a$. А сумма членов $a+6a = 7a$. По условию эта сумма 848 и она должна делиться на 7. Но 848 не делится на 7. Наше предположение неверно, следовательно, заданная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, такой является последовательность:
106; $106 \cdot 6$; 106, то есть 106; 636; 106.

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 7 (это возможно, если два соседних члена равны 1 и 6).

$848 = 7 \cdot 121 + 1$. Может быть 121 такая пара и число 1.

Значит, максимальное число членов последовательности может быть $121 \cdot 2 + 1 = 243$.

В этом случае последовательность имеет вид: 1, 6, 1, 6, ..., 1.

Ответ: а) нет; б) да; в) 243.

Решение варианта 18

1. $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{320}{40}$ м/с $= 8$ м/с. Учитывая, что 1 час равен 3600 секундам, 1 км $= 1000$ м, получим, что 8 м/с $= \frac{8 \cdot 3600}{1000}$ км/ч $= 28{,}8$ км/ч.

Ответ: 28,8.

2. Определяем по рисунку наименьшую цену нефти (в долларах США за баррель) на момент закрытия торгов в период с 22 по 26 августа — на оси абсцисс она приходится на 26 августа, а ей соответствует ордината, равная 40, то есть 40 долларов США.

Ответ: 40.

3. Длина средней линии MN равна половине длины стороны AB, равной 5. $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ (см. рис. 96).

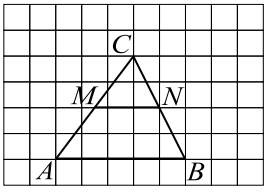


Рис. 96

Ответ: 2,5.

4. Пусть событие A означает, что студенту достался вопрос по теме «Механика», событие B — вопрос по теме «Электричество». По условию $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}3$, также по условию события A и B несовместны. Искомая веро-

ятность события «студенту достанется вопрос по одной из этих двух тем» равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}55$.

Ответ: 0,55.

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$, $3x - 10 = 2$, $x = 4$.

Ответ: 4.

6. Точка P — середина стороны AD, поэтому $PD = 0{,}5AD$. Обозначим h высоту параллелограмма, проведённую к стороне AD (см. рис. 97). Тогда площадь параллелограмма S равна $AD \cdot h = 226$. Площадь треугольника CDP равна

$$\frac{1}{2}PD \cdot h = \frac{0{,}5AD}{2} \cdot h = \frac{AD}{4} \cdot h = \frac{1}{4}S = 56{,}5.$$

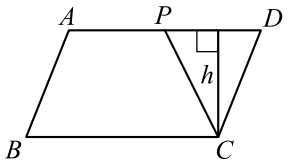


Рис. 97

Ответ: 56,5.

7. Пусть x_0 — абсцисса точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней. Тогда значение производной $y = f'(x)$ в точке x_0 равно 0, так как угловой коэффициент оси абсцисс $y = 0$ равен 0.

Но из графика видно, что $f'(x) = 0$ в единственной точке $x_0 = -5$.

Действительно, прямая $y = 0$ пересекает график функции $y = f'(x)$ в единственной точке $(-5; 0)$, абсцисса которой равна -5.

Ответ: -5.

8. Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 4a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 8, и a — сторона ромба. Найдём сторону ромба, пользуясь тем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делится пополам.

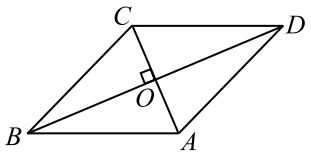


Рис. 98

Из треугольника BOC (см. рис. 98) по теореме Пифагора находим $BC^2 = BO^2 + OC^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + 2{,}25 = 6{,}25$, $BC = 2{,}5$. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 4 \cdot 2{,}5 \cdot 8 = 80$. $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. Отсюда, $S_{\text{пов. призмы}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 6 + 80 = 92$.

Ответ: 92.

9. $2\log_7\log_2(2^7) = 2\log_7 7 = 2 \cdot 1 = 2$.

Ответ: 2.

10. Решим неравенство $L \geqslant 9{,}8$. $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \geqslant \frac{98}{10}$, $\frac{14^2}{10}\sin 2\alpha \geqslant \frac{98}{10}$, $196\sin 2\alpha \geqslant 98$, $\sin 2\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Угол α — острый, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2\alpha < \pi$, тогда $\frac{\pi}{6} \leqslant 2\alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}$, $2\alpha \geqslant \frac{\pi}{6}$, $\alpha \geqslant \frac{\pi}{12} = 15^\circ$.

Ответ: 15.

11. Стоимость электрочайника первоначально была 4500 рублей. Через месяц она стала $4500 - 4500 \cdot 0,01x = 4500(1 - 0{,}01x)$ рублей, где x — количество процентов, на которые уменьшается ежемесячно стоимость электрочайника. Тогда через два месяца его стоимость стала $4500(1 - 0{,}01x)(1 - 0{,}01x) = 4500(1 - 0{,}01x)^2$.

Составим и решим уравнение:
$4500(1 - 0{,}01x)^2 = 3645$, $1 - 0{,}01x = 0{,}9$, $x = 10$. Цена электрочайника уменьшалась на 10%.

Ответ: 10.

12. ОДЗ: $(x + 11)^7 > 0$, $x + 11 > 0$, $x > -11$. На ОДЗ исходная функция примет вид: $y = 7x - 7\ln(x + 11)$.

Найдём производную: $y' = 7 - \frac{7}{x + 11}$. Определим нули производной: $7 - \frac{7}{x + 11} = 0$, $\frac{1}{x + 11} = 1$, $x = -10$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 99).

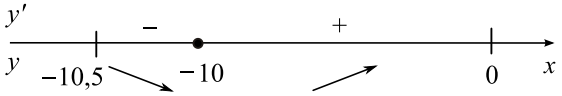


Рис. 99

Из рисунка видно, что на отрезке $[-10{,}5;\ -10]$ исходная функция убывает, а на отрезке $[-10;\ 0]$ возрастает. Таким образом, наименьшее значение на отрезке $[-10{,}5;\ 0]$ достигается при $x = -10$ и равно $y(-10) = 7 \cdot (-10) - \ln(-10 + 11)^7 = -70$.

Ответ: -70.

13. а) $2\cos^2 x + 19\sin x + 8 = 0$,

$2(1 - \sin^2 x) + 19\sin x + 8 = 0$,

$-2\sin^2 x + 19\sin x + 10 = 0$,

$2\sin^2 x - 19\sin x - 10 = 0$.

Пусть $\sin x = y$, $|y| \leqslant 1$, уравнение примет вид $2y^2 - 19y - 10 = 0$,

$y_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 80}}{4} = \frac{19 \pm 21}{4}$.

$y_1 = 10$ или $y_2 = -\frac{1}{2}$.

$y_1 = 10$ не удовлетворяет условию $|y| \leqslant 1$.

$\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Найдём корни уравнения на отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 100).

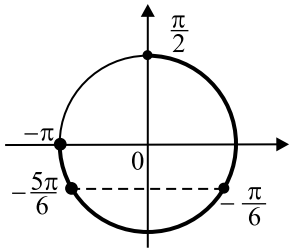


Рис. 100

Это числа $-\frac{5\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.

14. а) PM пересекается с NQ в точке O (см. рис. 101), при этом O — середина PM и NQ. В плоскости MSP проведём $AO \parallel SP$, она пересечёт SM в середине ребра (OA — средняя линия $\triangle PSM$). Точку A соединим с точкой N, AN лежит в плоскости MSN, точку A соединим с точкой Q, AQ лежит в плоскости MSQ. В плоскости ANQ находится прямая $AO \parallel PS$, и по признаку параллельности прямой и плоскости получаем: $PS \parallel ANQ$. Плоскость ANQ содержит диагональ NQ и параллельна боковому ребру PS, то есть сечение NAQ является искомым.

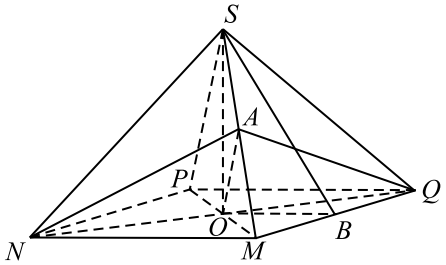


Рис. 101

б) Докажем, что $\triangle ANQ$ — равнобедренный, то есть $AN = AQ$. Это следует из равенства треугольников NAM и AMQ (по двум сторонам: MA — общая, $NM = MQ$ — и углу: $\angle AMQ = \angle AMN$).

$NQ = 7\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной $NM = 7$. Проведём $SB \perp MQ$.

В $\triangle BSM$: $\angle SMB = 45°$ ($\angle QSM = 90°$; $\triangle QSM$ — равнобедренный), $\angle BSM = 45°$, $SB = MB = \frac{7}{2}$. $MS = \frac{MB}{\sin 45°} = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Точка O — середина NQ, $AO \parallel SP$, AO — средняя

линия $\triangle MSP$, $AO = \frac{1}{2}SP$. $AO = \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$. AO — высота $\triangle ANQ$, следовательно,

$$S_{\text{сечения}} = S_{\triangle ANQ} = \frac{1}{2}NQ \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{4} = \frac{49 \cdot 2}{8} = \frac{49}{4} = 12{,}25.$$

Ответ: 12,25.

15. Введём обозначение $3^x = t$, $t > 0$. Неравенство примет вид $3t^2 + 4t + 2|t-2| \geqslant 5$.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3t^2 + 4t + 2t - 4 \geqslant 5, \\ t \geqslant 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3t^2 + 4t + 2(-t+2) \geqslant 5, \\ 0 < t \leqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3t^2 + 6t - 9 \geqslant 0, \\ t \geqslant 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3t^2 + 2t - 1 \geqslant 0, \\ 0 < t \leqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t \leqslant -3; t \geqslant 1, \\ t \geqslant 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} t \leqslant -1; t \geqslant \frac{1}{3}, \\ 0 < t \leqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t \geqslant 2, \\ \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 2; \end{array}\right. \quad t \geqslant \frac{1}{3}.$$

$3^x \geqslant \frac{1}{3}$; $x \geqslant -1$.

Ответ: $[-1; +\infty)$.

16. а) Докажем, что точка O лежит на медиане BK (см. рис. 102).

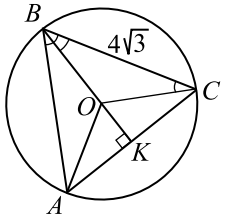


Рис. 102

$\triangle BOC$ — равнобедренный ($OB = OC$ как радиусы), следовательно, $\angle OCB = \angle OBC$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). По условию $\angle KBC = \angle OCB$, значит, $\angle KBC = \angle OBC$.

$\triangle ABC$ — остроугольный, значит, O лежит внутри треугольника, K и O лежат по одну сторону от BC. В этом случае из равенства $\angle KBC$ и $\angle OBC$ следует, что точка O лежит на медиане BK.

б) $\triangle AOC$ — равнобедренный, так как $AO = OC$ (как радиусы), OK — медиана, тогда OK — высота, отсюда BK — высота в $\triangle ABC$, BK — высота и медиана $\triangle ABC$, значит, он равнобедренный, $AB = BC$.

По условию $\angle ABC = 60^\circ$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$, $AB = BC = AC = 4\sqrt{3}$. $\triangle ABC$ — правильный.

$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle AOC$ (по трём сторонам),

$$S_{BOA} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3\sqrt{3}}{12} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Ежегодный платёж состоит из двух частей: одна и та же сумма $x = \dfrac{3}{n}$ млн рублей, на которую каждый год уменьшается сумма кредита (долга), и плата за пользование кредитом, которая составляет 20% от оставшегося долга. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на май должен уменьшаться до нуля равномерно:

$3; 3-x; 3-2x; \ldots; 3-(n-1)x; 0.$

Ежегодные выплаты процентов за пользованием кредитом составят (в млн рублей): $0{,}2 \cdot 3; 0{,}2 \cdot (3-x); 0{,}2 \cdot (3-2x); \ldots; 0{,}2 \cdot (3-(n-1)x).$

Сумму выплат процентов за пользование кредитом посчитаем как сумму арифметической прогрессии.

$$0{,}2 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot (3-x) + 0{,}2 \cdot (3-2x) + \ldots + 0{,}2 \cdot (3-(n-1)x) =$$
$$= 0{,}2(3 + (3-x) + (3-2x) + \ldots + (3-(n-1)x)) =$$
$$= 0{,}2 \cdot \frac{3+3-(n-1)x}{2} \cdot n = 0{,}2 \cdot \frac{\left(6-(n-1)\cdot\dfrac{3}{n}\right)\cdot n}{2} =$$
$$= 0{,}2 \cdot \frac{6n-3(n-1)}{2} = \frac{3n+3}{10}.$$

За n лет клиент банка должен выплатить 3 млн рублей кредита и проценты за пользование кредитом $\dfrac{3n+3}{10}$ млн рублей, что по условию равно 5,1 млн рублей.

$$3 + \frac{3n+3}{10} = 5{,}1;\ \frac{3n+3}{10} = 2{,}1,\ 3n+3 = 21,\ n = 6.$$

Кредит планируется взять на 6 лет.

Ответ: 6.

18. Решим задачу графически. Если $|5-2a| = 0$, то неравенство системы задаёт круг с центром в точке $(2a; \cos \pi a)$ и радиусом $|5a-21|$. Если $|5a-21| = 0$, то решением неравенства будет единственная точка: $x = 2a = \dfrac{42}{5}$, $y = \cos \pi a = \cos \dfrac{21\pi}{5}$, а тогда у системы не может быть более одного решения.

Уравнение системы задаёт угол (см. рис. 103), биссектрисой которого является ось Ox. Сторона этого угла проходит через точки $(0;0)$ и $\left(1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и поэтому образует угол 30° с положительным направлением оси Ox.

Ровно два решения будет, если круг касается обеих сторон угла. Тогда центр круга должен лежать на биссектрисе угла, то есть на луче Ox. Следовательно, ордината центра круга должна равняться нулю, а абсцисса быть больше нуля. Ордината равна нулю, если $\cos \pi a = 0$, $\pi a = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $a = \dfrac{1}{2} + k$, $k \in Z$.

Абсцисса центра круга равна $2a$ и равна $2k+1$, она больше нуля, если $k \geqslant 0$. Рассмотрим $\triangle O_1OM$, где O_1 — центр круга, M — одна из точек касания. Тогда $O_1M = |5a-21|$, $OO_1 = 2a$, $\angle O_1MO = 90^\circ$, $\angle MOO_1 = 30^\circ$. Тогда

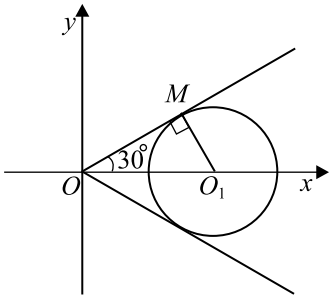


Рис. 103

$O_1M = O_1O \cdot \sin \angle O_1OM = 2a \sin 30° = a$. Значит, $a = |5a - 21|$, $k + \frac{1}{2} = \left|5k + \frac{5}{2} - 21\right|$, $k + \frac{1}{2} = \left|5k - \frac{37}{2}\right|$; отсюда либо $k + \frac{1}{2} = 5k - \frac{37}{2}$, то есть $4k = 19$, $k = \frac{19}{4}$; либо $k + \frac{1}{2} = \frac{37}{2} - 5k$, $6k = 18$, $k = 3$. k — целое число. $\frac{19}{4} \notin Z$; $3 \in Z$ и $3 \geqslant 0$. Таким образом, $k = 3$, $a = \frac{1}{2} + k = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

19. а) Да, может. Пусть в первые два хода нумизмат переворачивает монеты, лежащие кверху орлом, а за третий ход — 5 монет, лежащих кверху орлом, и 1 монету, лежащую кверху решкой.

б) Нет, не может. После очередного хода монеты на столе могут быть двух видов: монеты кверху орлом и монеты кверху решкой.

Если за один ход нумизмат переворачивает 6 монет одного вида, то количество монет каждого вида изменяется на 6.

Если за один ход нумизмат переворачивает 5 монет одного вида и 1 монету другого, то количество монет каждого вида изменяется на 4.

Если за один ход нумизмат переворачивает 4 монеты одного вида и 2 монеты другого, то количество монет каждого вида изменяется на 2.

Если за один ход нумизмат переворачивает по 3 монеты каждого вида, то количество монет каждого вида не изменяется.

Таким образом, количество монет, которые лежат кверху решкой, в результате каждого хода изменяется на 6, на 4, на 2 или на 0 (не изменяется), то есть изменяется на чётное число. Следовательно, количество монет кверху решкой всегда остаётся чётным (изначально их 0 — чётное число).

в) Количество монет кверху орлом всякий раз изменяется на чётное число, следовательно, всегда остаётся нечётным (изначально их 2025 — нечётное число). Наименьшее нечётное целое неотрицательное число равно 1. Покажем, что на столе может оказаться ровно 1 монета кверху орлом. Пусть первые 336 ходов нумизмат переворачивает монеты, лежащие кверху орлом. Тогда он перевернёт 2016 монет, и на столе останется 9 монет, лежащих кверху орлом. Следующим ходом он перевернёт 5 монет, лежащих орлом кверху, и 1 монету, лежащую кверху решкой. Количество монет кверху орлом станет равным 5. Таким же образом нумизмат осуществит последний ход: перевернёт 5 монет, лежащих

орлом кверху, и 1 монету, лежащую кверху решкой. На столе останется 1 монета орлом кверху.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1.

Решение варианта 19

1. $v_{ср} = \dfrac{S}{t} = \dfrac{360}{40}$ м/с $= 9$ м/с. Учитывая, что 1 час равен 3600 секундам, 1 км $= 1000$ м, получим, что 9 м/с $= \dfrac{9 \cdot 3600}{1000}$ км/ч $= 32{,}4$ км/ч.

Ответ: 32,4.

2. Определяем по рисунку наибольшую цену никеля (в долларах США за тонну) на момент закрытия торгов в период с 7 по 13 мая: отметке «11 мая» по оси абсцисс соответствует наибольшая ордината, равная 13 400, то есть 13 400 долларов США.

Ответ: 13 400.

3. Длина средней линии MN равна половине длины стороны AB, равной 6. $MN = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см. рис. 104).

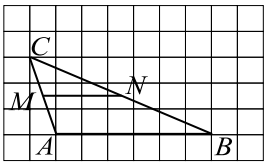


Рис. 104

Ответ: 3.

4. Сначала найдём вероятность события «оба кулера неисправны», противоположного событию из условия задачи. Обозначим через A и B события «первый кулер неисправен» и «второй кулер неисправен». По условию $P(A) = P(B) = 0{,}2$. Событие «оба кулера неисправны» — это $A \cap B$, пересечение событий A и B, его вероятность равна $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ (так как события A и B независимы).
Искомая вероятность равна $1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

5. $5^{12-4x} = 5^{-3},\ 12 - 4x = -3,\ -4x = -15,\ x = 3{,}75$.

Ответ: 3,75.

6. $S_{ABED} = S_{ABC} - S_{CDE}$. DE — средняя линия, параллельная стороне AB, поэтому D и E — середины сторон.

$CD = \dfrac{1}{2}CA,\ CE = \dfrac{1}{2}CB.\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CA \cdot CB \sin C,$

$S_{CDE} = \dfrac{1}{2}CD \cdot CE \sin C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}CA \cdot \dfrac{1}{2}CB \sin C = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2}CA \cdot CB \sin C = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{76}{4} = 19.$

$S_{ABED} = S_{ABC} - S_{CDE} = 76 - 19 = 57.$

Ответ: 57.

7. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 9$ в произвольной точке x_0 равен $y'(x_0)$. Но $y' = 2x - 4$, значит,

$y'(x_0) = 2x_0 - 4$. Угловой коэффициент касательной $y = 4x - 7$, указанной в условии, равен 4. Параллельные прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты. Поэтому находим такое значение x_0, что $2x_0 - 4 = 4$. Получаем: $x_0 = 4$.

Ответ: 4.

8. Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 6a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 8, и a — сторона правильного шестиугольника, равная 6. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288$.

Ответ: 288.

9. $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 17} + \log_{17} 0{,}04 = \log_{17} 25 + \log_{17} 0{,}04 = \log_{17}(25 \cdot 0{,}04) = \log_{17} 1 = 0$.

Ответ: 0.

10. Подставим данные в формулу $H = \dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, учитывая, что максимальная высота, на которой мячик пролетит, не меньше 1,25 метра. $\dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha) \geqslant \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{10^2}{40}(1 - \cos 2\alpha) \geqslant \dfrac{5}{4}$, $1 - \cos 2\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\cos 2\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $2\alpha \geqslant 60^\circ$, $\alpha \geqslant 30^\circ$. Наименьшее значение угла α, при котором мячик пролетит над стеной высотой 1 м на расстоянии 0,25 м, равно 30°.

Ответ: 30.

11. Пусть процент годовых будет x, тогда через год вклад Елены составил: $5500 + 0,01x \cdot 5500 = 5500(1 + 0{,}01x)$ рублей, а ещё через год — $5500(1 + 0{,}01x)^2$ рублей. Вклад Натальи лежал в банке только год, потому он равен $5500(1 + 0{,}01x)$ рублей. А разность между получившимися вкладами Елены и Натальи составила 739,2 рубля.

Составим и решим уравнение:
$5500(1 + 0{,}01x)^2 - 5500(1 + 0{,}01x) = 739{,}2$,
$(1 + 0{,}01x)^2 - (1 + 0{,}01x) = 0,1344$, $x^2 + 100x - 1344 = 0$, $x_1 = -112$, $x_2 = 12$. Банк начислял 12% годовых.

Ответ: 12.

12. ОДЗ: $x > 0$.

Найдём производную исходной функции:

$$y'(x) = 8x - 19 + \frac{11}{x} = \frac{8x^2 - 19x + 11}{x}.$$

Определим нули производной: $y'(x) = 0$; $\dfrac{8x^2 - 19x + 11}{x} = 0$; $8x^2 - 19x + 11 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 8 \cdot 11}}{2 \cdot 8} = \dfrac{19 \pm 3}{16}$, $x_1 = 1$, $1 \in \left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}\right]$, $x_2 = \dfrac{22}{16} = \dfrac{11}{8} > \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$, $x_2 \notin \left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}\right]$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 105).

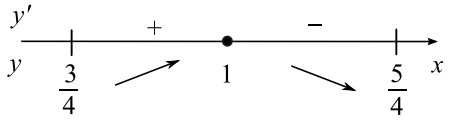


Рис. 105

Из рисунка видно, что на отрезке $\left[\frac{3}{4};\,1\right]$ исходная функция возрастает, а на отрезке $\left[1;\,\frac{5}{4}\right]$ убывает. Таким образом, наибольшее значение на отрезке $\left[\frac{3}{4};\,\frac{5}{4}\right]$ достигается при $x=1$ и равно $y(1)=4\cdot 1^2-19\cdot 1+11\ln 1+715=700$.

Ответ: 700.

13. а) $\cos 2x+3\sin x-2=0$,

$1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0$,

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$.

Пусть $\sin x=y$, $|\sin x|\leqslant 1$, уравнение примет вид $2y^2-3y+1=0$,

$y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}$; $y_1=1$, $y_2=\frac{1}{2}$.

$\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$;

б) Найдём корни уравнения на отрезке $[-3\pi;-\pi]$.

С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие $[-3\pi;-\pi]$ (см. рис. 106).

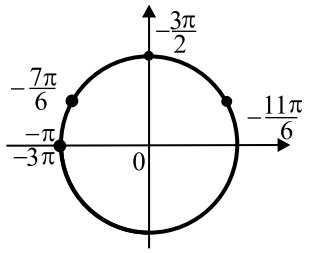


Рис. 106

Это числа $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

14. а) Пусть KO — высота пирамиды, F — середина MK; $FE\parallel MP$ (в плоскости PKM). Так как FE — средняя линия $\triangle PKM$, то $FE=\frac{MP}{2}$.

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через NF и параллельной MP, то есть плоскостью NFE. L — точка пересечения EF и KO. Так как точки L и N принадлежат искомому сечению и лежат в плоскости KQN, то точка T, полученная как пересечение LN и KQ, является также точкой пересечения искомого сечения и ребра KQ. $NETF$ — искомое сечение.

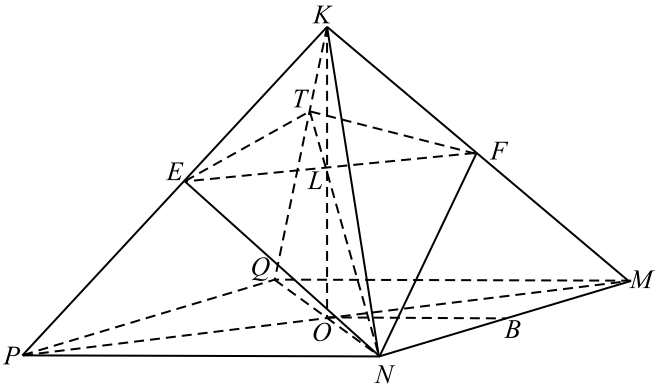


Рис. 107

б) Плоскости NFE и MPK пересекаются по прямой FE (см. рис. 107). Значит, угол между этими плоскостями равен линейному углу двугранного угла $OFEN$, построим его: $LO \perp MP$, $MP \parallel FE$, следовательно, $LO \perp FE$; $\triangle NFE$ — равнобедренный ($NE = NF$ как соответствующие медианы равных треугольников KPN и KMN), NL — его медиана ($EL = LF$, так как $PO = OM$, а $\triangle KEF \sim \triangle KPM$). Отсюда $NL \perp FE$ и $\angle NLO$ — искомый.

$$ON = \frac{1}{2}QN = \frac{1}{2}MN\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

$\triangle KON$ — прямоугольный.

Катет KO по теореме Пифагора равен $KO = \sqrt{KN^2 - ON^2}$.

$$OL = \frac{1}{2}KO = \frac{1}{2}\sqrt{KN^2 - ON^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9 \cdot 26 - 9 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{9(26-2)} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{24} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}. \operatorname{tg}\angle NLO = \frac{ON}{OL} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \angle NLO = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

15. $3^{3x} - 3^x \cdot 2^{2x} \cdot 3 + 3^{2x} \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{3x} \geqslant 0.$

Разделим обе части неравенства на 2^{3x}, $2^{3x} \neq 0$, $2^{3x} > 0$, неравенство примет вид

$$\frac{3^{3x}}{2^{3x}} - \frac{3^x \cdot 2^{2x} \cdot 3}{2^{3x}} + \frac{3^{2x} \cdot 2^x}{2^{3x}} - \frac{3 \cdot 2^{3x}}{2^{3x}} \geqslant 0,$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3 \geqslant 0$, введём обозначение $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, $t > 0$.

$t^3 + t^2 - 3t - 3 \geqslant 0$,

$t^2(t+1) - 3(t+1) \geqslant 0$, $(t+1)(t^2 - 3) \geqslant 0$,

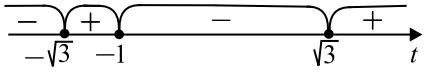


Рис. 108

$t \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ (см. рис. 108), но $t > 0$, следовательно, решением неравенства $t^3 + t^2 - 3t - 3 \geqslant 0$ является $t \in [\sqrt{3}; +\infty)$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, тогда $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant \sqrt{3}$, $x \geqslant \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}\log_3 3}{\log_3 3 - \log_3 2}$, $x \geqslant \frac{1}{2(1-\log_3 2)}$.

$x \in \left[\frac{1}{2(1-\log_3 2)}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2(1-\log_3 2)}; +\infty\right)$.

16. а) Доказательство.

По условию $MF : MN = 1 : 3$, то есть $MF = \frac{1}{3}MN$ (см. рис. 109).

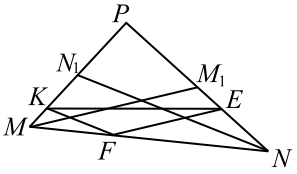


Рис. 109

По свойству параллельных линий, отсекающих пропорциональные отрезки на пересекаемых прямых, имеем $MK = \frac{1}{3}MN_1$, $MN_1 = N_1P$, значит, $MN_1 = \frac{1}{2}MP$, $MK = \frac{1}{6}MP$; $NE = \frac{2}{3}NM_1$, $NM_1 = M_1P$, $NE = \frac{2}{6}PN = \frac{1}{3}PN$.

Что и требовалось доказать.

б) $S_{FEK} = S_{MNP} - (S_{MKF} + S_{KPE} + S_{FEN})$.

$S_{MNP} = 48$; $S_{MKF} = \frac{1}{2}MK \cdot MF \sin\angle M = \frac{1}{2}MP \cdot MN \sin\angle M \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} =$

$= S_{MNP} \cdot \frac{1}{18} = 48 \cdot \frac{1}{18} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

$S_{KPE} = \frac{1}{2}KP \cdot PE \sin\angle P = \frac{1}{2}MP \cdot PN \sin\angle P \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = S_{MNP} \cdot \frac{10}{18} =$

$= S_{MNP} \cdot \frac{5}{9} = 48 \cdot \frac{5}{9} = \frac{80}{3}$.

$S_{FEN} = \frac{1}{2}FN \cdot NE \sin\angle N = \frac{1}{2}MN \cdot PN \sin\angle N \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = S_{MNP} \cdot \frac{2}{9} = \frac{32}{3}$.

$S_{FEK} = 48 - \left(\frac{8}{3} + \frac{80}{3} + \frac{32}{3}\right) = 8$.

Ответ: 8.

17. Пусть искомый ежегодный платёж составляет x рублей, тогда в конце первого года Иван Иванович будет должен $1{,}2 \cdot 910\,000 - x = 1\,092\,000 - x$ (рублей). Аналогично в конце второго года его долг составит $1{,}2(1\,092\,000 - x) - x = 1\,310\,400 - 2{,}2x$ (рублей). В конце третьего года его долг составит $1{,}2(1\,310\,400 - 2{,}2x) - x = 1\,572\,480 - 3{,}64x$.

По условию Иван Иванович выплатил долг тремя платежами, поэтому к концу третьего года долг составит 0 рублей, то есть $1\,572\,480 - 3{,}64x = 0$, $x = \dfrac{1\,572\,480}{3{,}64} = 432\,000$ (рублей).

Итак, сумма ежегодного платежа равна 432 000 рублей.

Ответ: 432 000 рублей.

18. Графиком функции $y = -|x - 2\sin\pi a|$ является «уголок» (90°), вершина которого расположена в точке $(\sin 2\pi a; 0)$, а стороны направлены вниз (см. рис. 110). Графиком неравенства системы является часть плоскости Oxy, расположенная выше уголка (закрашена штриховкой на рис. 110). При $a \neq 0$ графиком уравнения $(x - \sin 2\pi a)^2 + (y - 4a)^2 = \dfrac{2a^4}{25}$ является окружность с центром в точке $(\sin 2\pi a; 4a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{2a^4}{25}} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}$. (При $a = 0$ система имеет единственное решение $x = y = 0$.)

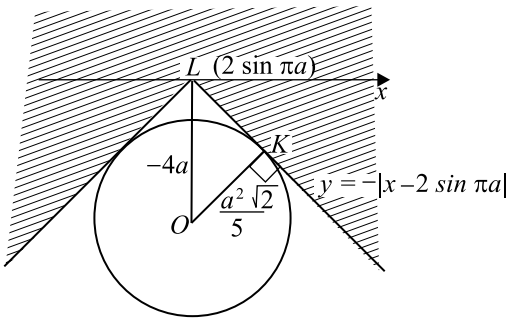


Рис. 110

Для того чтобы было ровно 2 решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность была вписана в этот угол, при этом центр окружности должен лежать на биссектрисе угла (то есть на прямой $x = 2\sin\pi a$), а ордината центра окружности должна быть меньше 0.

Тогда $\angle OKL = 90^\circ$ по свойству радиуса, проведённого в точку касания, $\angle KLO = 45^\circ$, $OL = |4a| = -4a$, $OK = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}$. $OL = \dfrac{OK}{\sin\angle KLO} = OK\sqrt{2} = \dfrac{2a^2}{5}$. Приравняв $-4a$ и $\dfrac{2a^2}{5}$, получим уравнение $4a = -\dfrac{2a^2}{5}$, ненулевой корень которого $a = -10$. Проверим, что при $a = -10$ центр окружности принадлежит биссектрисе угла, то есть выполнено равенство $2\sin\pi a = \sin 2\pi a$. $2\sin(-10\pi) = \sin(2\pi(-10))$. Это равенство верное, значит, при $a = -10$ система имеет ровно 2 решения (все условия выполнены).

Ответ: -10.

19. а) Да. Приведём пример, когда это можно сделать. Пусть первые 4 хода нумизмат переворачивает монеты, которые ранее не были задействованы. А пятым ходом он переворачивает 3 монеты, которые раньше не трогал, и 2 монеты, которые к этому моменту лежат решкой кверху. Общее число перевёрнутых монет равно $4 \cdot 5 + 3 - 2 = 21$.

б) Нет, нельзя. В результате каждого хода количество монет, лежащих кверху решкой, изменяется на нечётное число. Например, если нумизмат переворачивает 4 монеты,

лежащие решкой кверху, и 1 монету, лежащую кверху орлом, то количество монет кверху решкой уменьшается на 3 $(-4+1=-3)$. В общем случае оно может изменяться на 5, на 3 или на 1 ($5-0=5$, $4-1=3$, $3-2=1$, $2-3=-1$, $1-4=-3$, $0-5=-5$). Алгебраическая сумма пяти нечётных чисел нечётна. Значит, за 5 ходов количество монет кверху решкой изменится на нечётное число. Изначально их 0, 0 — чётное число. Через 5 ходов количество монет кверху решкой нечётно и потому не равно 20.

в) За один ход переворачивают 5 монет. Значит, чтобы перевернуть 2017 монет, потребуется не менее $\frac{2017}{5}$ ходов. С другой стороны, количество необходимых ходов нечётно (изначально количество монет кверху решкой равно 0, то есть чётно, за каждый ход это количество меняется на нечётное число, 2017 — нечётно). Наименьшее целое нечётное число k, такое, что $k \geqslant \frac{2017}{5}$, равно 405.

Покажем, что 405 ходов достаточно. Пусть первые 402 хода нумизмат переворачивает ранее не тронутые монеты. Тогда после 402 ходов 2010 монет будут кверху решкой и 7 — кверху орлом. За каждый из двух следующих ходов нумизмат перевернёт 2 монеты, лежащие кверху решкой, и 3, лежащие кверху орлом. Наконец, 405-м ходом он перевернёт 5 монет, лежащих кверху орлом.

Ответ: а) да; б) нет; в) 405.

Решение варианта 20

1. $v_{ср}=\frac{S}{t}=\frac{150}{25}$ м/с $=6$ м/с. Учитывая, что 1 час равен 3600 секундам, 1 км $=1000$ м, получим, что 6 м/с $=\frac{6\cdot 3600}{1000}$ км/ч $=21{,}6$ км/ч.

Ответ: 21,6.

2. Определяем по рисунку наибольшую цену акции (в долларах США) на момент закрытия торгов в период с 12 по 17 мая: отметке «12 мая» на оси абсцисс соответствует наибольшая ордината, равная 398, то есть 398 долларов США.

Ответ: 398.

3. Длина средней линии MN равна половине длины стороны AB, равной 6. $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ (см. рис. 111).

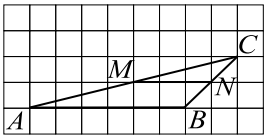


Рис. 111

Ответ: 3.

4. Сначала найдём вероятность события «обе лампы перегорели в течение года», противоположного событию из условия задачи. Обозначим через A и B события «первая лампа перегорела в течение года» и «вторая лампа перегорела в течение года». По условию $P(A)=P(B)=0{,}4$. Событие «обе лампы перегорели в течение года» — это $A\cap B$,

его вероятность равна $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ (так как события A и B независимы).

Искомая вероятность равна $1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

Ответ: 0,84.

5. $4^{-8x-24} = 4^2$, $-8x - 24 = 2$, $-8x = 26$, $x = -3{,}25$.

Ответ: $-3{,}25$.

6. $S_{MPTK} = S_{MPE} - S_{KTE}$. KT — средняя линия, параллельная стороне MP, поэтому K и T — середины сторон и $ET = \frac{1}{2}EP$, $KE = \frac{1}{2}EM$.

$\triangle MPE \sim \triangle KTE$ по двум углам: $\angle E$ — общий, $MP \parallel KT \Rightarrow \angle MPE = \angle KTE$. $S_{KTE} = \frac{1}{4}S_{MPE} = \frac{68}{4} = 17$. $S_{MPTK} = 68 - 17 = 51$.

Ответ: 51.

7. Угловой коэффициент прямой к графику функции $y = -x^2 + 5x - 7$ в произвольной точке x_0 равен $y'(x_0)$. Но $y' = -2x + 5$, значит, $y'(x_0) = -2x_0 + 5$. Угловой коэффициент прямой $y = -3x + 4$, указанной в условии, равен -3. Параллельные прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты. Поэтому находим такое значение x_0, что $= -2x_0 + 5 = -3$. Получаем: $x_0 = 4$.

Ответ: 4.

8. Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 8a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 7, и a — сторона правильного восьмиугольника, равная 5. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

Ответ: 280.

9. $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 11} + \log_{11} 0{,}5 = \log_{11} 2 + \log_{11} 0{,}5 = \log_{11}(2 \cdot 0{,}5) = \log_{11} 1 = 0$.

Ответ: 0.

10. Подставим данные в формулу $H = \dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, учитывая, что максимальная высота, на которой мячик пролетит, должна быть не меньше чем $2 + \dfrac{13}{16} = \dfrac{45}{16}$ метра.

$\dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha) \geqslant \dfrac{45}{16}$, $\dfrac{15^2}{40}(1 - \cos 2\alpha) \geqslant \dfrac{45}{16}$,

$1 - \cos 2\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\cos 2\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $2\alpha \geqslant 60^\circ$, $\alpha \geqslant 30^\circ$. Наименьшее значение угла α, при котором мячик пролетит над стеной высотой 2 м на расстоянии $\dfrac{13}{16}$ м, равно 30°.

Ответ: 30.

11. Пусть процент годовых будет x, тогда через год вклад Николая составил: $8000 + 0{,}01x \cdot 8000 = 8000(1 + 0{,}01x)$ рублей, а ещё через год — $8000(1 + 0{,}01x)^2$ рублей. Вклад Михаила лежал в банке только год, потому он равен $8000(1+0{,}01x)$ руб. А разность между получившимися вкладами Николая и Михаила составила 784,8 рублей. Составим и решим уравнение:

$8000(1+0{,}01x)^2 - 8000(1+0{,}01x) = 784{,}8$,
$(1+0{,}01x)^2 - (1+0{,}01x) = 0{,}0981$, $x^2 + 100x - 981 = 0$, $x_1 = -109$, $x_2 = 9$. Банк начислял 9% годовых.

Ответ: 9.

12. ОДЗ: $x > 0$.

Найдём производную исходной функции:

$$y'(x) = 10x - 12 + \frac{2}{x} = \frac{10x^2 - 12x + 2}{x}.$$

Определим нули производной: $y'(x) = 0$; $\dfrac{10x^2 - 12x + 2}{x} = 0$;

$5x^2 - 6x + 1 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 5 \cdot 1}}{5} = \dfrac{3 \pm 2}{5}$, $x_1 = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{5} \notin \left[\dfrac{3}{5}; \dfrac{7}{5}\right]$, $x_2 = 1$, $1 \in \left[\dfrac{3}{5}; \dfrac{7}{5}\right]$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции на рассматриваемом промежутке (см. рис. 112).

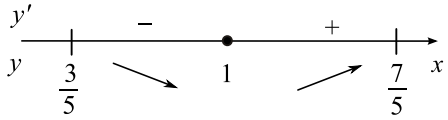


Рис. 112

Из рисунка видно, что на отрезке $\left[\dfrac{3}{5}; 1\right]$ исходная функция убывает, а на отрезке $\left[1; \dfrac{7}{5}\right]$ возрастает. Таким образом, наименьшее значение на отрезке $\left[\dfrac{3}{5}; \dfrac{7}{5}\right]$ достигается при $x = 1$ и равно $y(1) = 5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 2\ln 1 + 37 = 30$.

Ответ: 30.

13. а) $4\cos^2 x = 3\cos 2x + 1$,

$4\cos^2 x = 3(2\cos^2 x - 1) + 1$,

$4\cos^2 x = 6\cos^2 x - 3 + 1$,

$\cos^2 x = 1$, $\left[\begin{array}{l}\cos x = 1,\\ \cos x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z;\end{array}\right.$ $x = \pi k, k \in Z$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{4}\right)$, найдём из неравенства $-4\pi \leqslant \pi k < -\dfrac{5\pi}{4}$; $k = -4, -3, -2$.

$x_1 = -4\pi$, $-x_2 = -3\pi$, $x_3 = -2\pi$.

Ответ: а) $\pi k, k \in Z$; б) $-4\pi, -3\pi, -2\pi$.

14. а) Пусть PO — высота пирамиды, M — середина AP; $MN \parallel AC$ (в плоскости CPA). Так как MN — средняя линия $\triangle CPA$, то $MN = \dfrac{AC}{2}$.

Построим сечение пирамиды плоскостью BMN, проходящей через BM и параллельной AC (см. рис. 113).

F — точка пересечения NM и PO. $F \in BMN$, $B \in BMN$, следовательно, прямая BF лежит в плоскости сечения и пересекает ребро PD в точке K (BF лежит в плоскости BDP). $BNKM$ — искомое сечение.

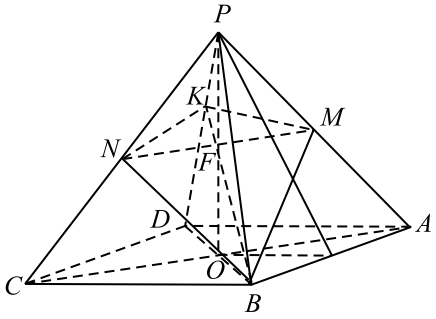


Рис. 113

б) Плоскости BNM и PAC пересекаются по прямой MN. Значит, угол между этими плоскостями равен линейному углу двугранного угла $OMNB$, построим его: $FO \perp AC$, $AC \parallel MN$, следовательно, $FO \perp MN$; $\triangle BMN$ — равнобедренный (так как BN и BM — соответствующие медианы равных треугольников BPC и BPA), BF — его медиана ($NF = FM$, так как $CO = OA$, а $\triangle PNM \sim \triangle PCA$). Отсюда $BF \perp MN$ и $\angle BFO$ — искомый.

$$BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

$\triangle BOP$ — прямоугольный. По теореме Пифагора $PO = \sqrt{BP^2 - OB^2}$.

$$FO = \frac{1}{2}PO = \frac{1}{2}\sqrt{BP^2 - BO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{250 - 50} = 5\sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg}\angle BFO = \frac{OB}{OF} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1,\ \angle BFO = 45^\circ.$$

Ответ: 45°.

15. $3^{2x^2+7} + 3^{(x+3)(x+1)} - 4 \cdot 3^{8x} \geqslant 0$, $3^{2x^2+7} + 3^{x^2+4x+3} - 4 \cdot 3^{8x} \geqslant 0$, разделим обе части неравенства на $3^{8x} \neq 0$, $3^{8x} > 0$; неравенство примет вид $3^{2x^2-8x+7} + 3^{x^2-4x+3} - 4 \geqslant 0$, введём обозначение $3^{x^2-4x+3} = t$, $t > 0$, получим: $3t^2 + t - 4 \geqslant 0$. Найдём корни уравнения $3t^2+t-4 = 0$, $t_1 = -\frac{4}{3}$, $t_2 = 1$. Решением неравенства $3t^2+t-4 \geqslant 0$ являются промежутки $\left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right]$ и $[1; +\infty)$. Так как $t > 0$, то $3^{x^2-4x+3} \geqslant 1$, $3^{x^2-4x+3} \geqslant 3^0$, $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$, $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$. То есть решениями этого неравенства являются $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

16. а) Доказательство.

По условию $BM : BC = 1 : 5$, то есть $BM = \frac{1}{5}BC$ (см. рис. 114).

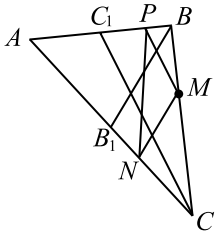


Рис. 114

По свойству параллельных линий, отсекающих пропорциональные отрезки на пересекаемых прямых, имеем $BP = \frac{1}{5}BC_1 = \frac{1}{10}AB$, $CN = \frac{4}{5}B_1C = \frac{4}{10}AC = \frac{2}{5}AC$, так как BB_1 и CC_1 — медианы и $BC_1 = \frac{1}{2}AB$, $B_1C = \frac{1}{2}AC$.

Что и требовалось доказать.

б) $S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{PBM} + S_{NMC} + S_{APN})$.

$S_{ABC} = 45$; $S_{PBM} = \frac{1}{2}PB \cdot BM \sin\angle B = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\angle B \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} =$

$= S_{ABC} \cdot \frac{1}{50} = 45 \cdot \frac{1}{50} = \frac{9}{10}$.

$S_{NMC} = \frac{1}{2}MC \cdot NC \sin\angle C = \frac{1}{2}BC \cdot AC \sin\angle C \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = S_{ABC} \cdot \frac{8}{25} =$

$= \frac{45 \cdot 8}{25} = \frac{72}{5}$.

$S_{APN} = \frac{1}{2}AP \cdot AN \sin\angle A = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle A \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} = S_{ABC} \cdot \frac{27}{50} =$

$= \frac{45 \cdot 27}{50} = \frac{243}{10}$.

$S_{MNP} = 45 - \left(\frac{9}{10} + \frac{72}{5} + \frac{243}{10}\right) = 45 - 39{,}6 = 5{,}4$.

Ответ: 5,4.

17. Пусть искомый ежегодный платёж составляет x рублей, тогда в конце первого года Ольга Петровна будет должна:
$1{,}1 \cdot 1\,655\,000 - x = 1\,820\,500 - x$ (руб.).

Аналогично в конце второго года её долг составит:
$1{,}1(1\,820\,500 - x) - x = 2\,002\,550 - 2{,}1x$ (руб.), а в конце третьего года её долг составит $1{,}1 \cdot (2\,002\,550 - 2{,}1x) - x = 2\,202\,805 - 3{,}31x$.

По условию Ольга Петровна должна выплатить долг тремя равными платежами, потому к концу третьего года долг составит 0 рублей, то есть $2\,202\,805 - 3{,}31x = 0$; $3{,}31x = 2\,202\,805$; $x = \frac{2\,202\,805}{3{,}31} = 665\,500$ (руб.).

Итак, сумма ежегодного платежа равна 665 500 рублей.

Ответ: 665 500 рублей.

18. Графиком функции $y = -|x-2\cos\pi a|$ является «уголок» (90°), вершина которого расположена в точке $(2\cos\pi a; 0)$, а стороны направлены вниз (см. рис. 115). Графиком неравенства системы является часть плоскости Oxy, расположенная выше уголка (закрашена штриховкой на рис. 115). При $a \neq 0$ графиком уравнения $(x-\sin 2\pi a)^2+(y-6a)^2 = -99a$ является окружность с центром в точке $(\sin 2\pi a; 6a)$ и радиусом $\sqrt{-99a} = 3\sqrt{-11a}$ (при $a = 0$ система имеет единственное решение $x = y = 0$).

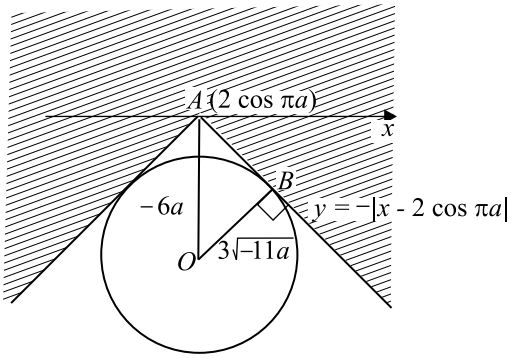


Рис. 115

Для того чтобы было ровно 2 решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность была вписана в этот угол, при этом центр окружности должен лежать на биссектрисе угла (то есть на прямой $x = 2\cos\pi a$), а ордината центра окружности должна быть меньше 0.

Пусть O — центр окружности, B — одна из точек касания окружности и угла.

Тогда $\angle OBA = 90^\circ$ по свойству радиуса, проведённого в точку касания, $\angle BAO = 45^\circ$, $OB = 3\sqrt{-11a}$, тогда, с одной стороны, $OA = \dfrac{OB}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{-22a}$, с другой стороны, $OA = -6a$. Приравнивая $-6a$ и $3\sqrt{-22a}$, решим уравнение $-6a = 3\sqrt{-22a}$: $a = -\dfrac{11}{2}$.

Проверим, что при $a = -\dfrac{11}{2}$ центр окружности принадлежит биссектрисе угла, то есть выполнено равенство $2\cos\pi a = \sin 2\pi a$: $2\cos\pi\left(-\dfrac{11}{2}\right) = \sin 2\pi\left(-\dfrac{11}{2}\right)$. $0 = 0$. Это равенство верное, значит, при $a = -\dfrac{11}{2}$ система имеет ровно 2 решения (все условия выполнены).

Ответ: $-\dfrac{11}{2}$.

19. а) Да. Приведём пример, как это можно сделать. Пусть первые 9 ходов нумизмат переворачивает монеты, которые ранее не были задействованы. А десятым ходом он переворачивает 2 монеты обратно, а также пять ранее не тронутых монет. Общее число монет кверху решкой окажется равным $7 \cdot 9 + 5 - 2 = 66$.

б) Нет, нельзя. В результате каждого хода количество монет, лежащих кверху решкой, изменяется на нечётное число. Например, если нумизмат переворачивает 6 монет, лежащих кверху орлом, и 1 монету, лежащую кверху решкой, то количество монет кверху

решкой увеличивается на 5 $(6-1=5)$. В общем случае оно может изменяться на 7, на 5, на 3 или на 1 ($7-0=7, 6-1=5, 5-2=3, 4-3=1, 3-4=-1, 2-5=-3, 1-6=-5, 0-7=-7$). Алгебраическая сумма 10 нечётных чисел чётна, следовательно, за 10 ходов количество монет кверху решкой изменится на чётное число. Изначально их 0, 0 — чётное число. Значит, через 10 ходов количество монет кверху решкой будет чётным и потому не может равняться 65.

в) За один ход нумизмат переворачивает 7 монет. Значит, чтобы перевернуть 1000 монет, потребуется не менее $\frac{1000}{7}$ ходов. С другой стороны, количество необходимых ходов чётно. Изначально число монет кверху решкой равно 0, то есть чётно, за каждый ход это число меняется на нечётное число, 1000 — чётное число, при этом сумма нечётного числа нечётных чисел — нечётна, а сумма чётного числа нечётных чисел — чётна. Наименьшее целое чётное число k, такое, что $k \geqslant \frac{1000}{7}$, равно 144.

Докажем, что 144 хода достаточно. Пусть первые 142 хода нумизмат переворачивает ранее не тронутые монеты. Останется 6 неперевёрнутых монет. Своим 143-м ходом он перевернёт 4 монеты обратно, а также 3 пока не задействованные монеты. Число монет орлом кверху станет равным $6+4-3=7$. Эти 7 монет коллекционер перевернёт последним 144-м ходом.

Ответ: а) да; б) нет; в) 144.

Решение варианта 22

1. Всего клиент должен вернуть банку 112% от суммы, взятой в кредит, то есть $135\,000 \cdot 1{,}12 = 151\,200$ рублей. По условию он должен вносить в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, поэтому ежемесячный платёж составляет $151\,200 : 12 = 12\,600$ рублей.

Ответ: 12 600.

2. Находим на диаграмме наибольшую и наименьшую среднесуточные температуры в период с 17 по 22 июля, они равны 16 °C и 26 °C. Их разность равна 10 °C.

Ответ: 10.

3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором катет $BC = 6$, катет $AC = 8$ (см. рис. 116). Гипотенузу AB найдём по теореме Пифагора. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

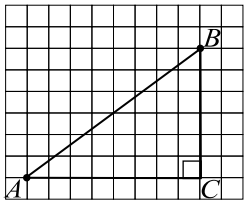


Рис. 116

Ответ: 10.

4. Пусть по жребию пойдут на митинг три человека, которые выберут жребии с номерами «1», «2» и «3» из 25 возможных. Пусть исходом будет получение учеником К. опре-

делённого номера. Тогда общее число исходов равно 25, благоприятных исходов 3. По определению, вероятность равна $\frac{3}{25} = 0{,}12$.

Ответ: 0,12.

5. Найдём ОДЗ: $3x + 17 \neq 0$, $2x + 15 \neq 0$.

$\frac{x-2}{3x+17} = \frac{x-2}{2x+15}$, $(x-2)(3x+17) = (x-2)(2x+15)$,

$(x-2)(3x+17)-(x-2)(2x+15) = 0$, $(x-2)(3x+17-(2x+15)) = 0$, $(x-2)(x+2) = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Оба числа входят в ОДЗ, большее из них $x = 2$.

Ответ: 2.

6. $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$ (см. рис. 117), $\frac{7}{BC} = 0{,}7$, $BC = 7 : 0{,}7 = 10$.

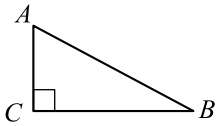


Рис. 117

Ответ: 10.

7. Производная отрицательна в тех точках промежутков, на которых функция убывает.

Рассматривая график, находим шесть таких точек с целочисленными абсциссами: -3; -2; 1; 2; 5; 6.

Ответ: 6.

8. Данный многогранник получается вырезанием из одной прямой призмы другой. В основании первой призмы лежит прямоугольник со сторонами 7 и 1, а её высота h_1 равна 5. Объём этой призмы V_1 находим по формуле $V_1 = S_1 \cdot h_1 = 7 \cdot 1 \cdot 5 = 35$. В основании второй призмы лежит прямоугольник со сторонами 2 и 1, а её высота h_2 равна 1. Объём этой призмы V_2 находим по формуле $V_2 = S_2 \cdot h_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Объём V данного многогранника равен разности объёмов указанных призм: $V = V_1 - V_2 = 35 - 2 = 33$.

Ответ: 33.

9. $((7x + 9y)^2 - 49x^2 - 81y^2) : 6xy =$

$= (49x^2 + 126xy + 81y^2 - 49x^2 - 81y^2) : 6xy = \frac{126xy}{6xy} = 21$.

Ответ: 21.

10. Подставим в формулу $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$ числовые данные $c = 1500$ м/с, $v = 20$ м/с, $f_0 = 185$ МГц: $20 = 1500 \cdot \frac{f-185}{f+185}$, $1 = 75 \cdot \frac{f-185}{f+185}$, $f + 185 = 75f - 75 \cdot 185$, $74f = 76 \cdot 185$, $37f = 38 \cdot 185$, $f = 38 \cdot 5 = 190$. Частота отражённого сигнала 190 МГц.

Ответ: 190.

11. Обозначим скорость первого лыжника через x км/ч, путь от А до В s км, тогда путь из пункта А в пункт В он пройдёт за $\frac{s}{x}$ ч. Половина пути пройдена вторым лыжником

со скоростью $(x-3)$ км/ч за $\dfrac{0{,}5s}{x-3}$ ч. Скорость второго лыжника на второй половине пути равна 22,5 км/ч, таким образом, время, затраченное на вторую половину пути вторым лыжником, равно $\dfrac{0{,}5s}{22{,}5} = \dfrac{s}{45}$ ч. Составим и решим уравнение: $\dfrac{s}{x} = \dfrac{s}{45} + \dfrac{0{,}5s}{x-3}$,

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{45} + \dfrac{1}{2(x-3)}$,

$90(x-3) = 45x + 2x(x-3)$, $90x - 270 = 45x + 2x^2 - 6x$,

$2x^2 - 51x + 270 = 0$, $x_1 = 7{,}5$, $x_2 = 18$. Скорость $7,5$ км/ч не удовлетворяет условию, поэтому скорость первого лыжника равна 18 км/ч.

Ответ: 18.

12. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Преобразуем исходную функцию $y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 9x + 724$;

$y = x^{1+\frac{1}{2}} - 9x + 724$;

$y = x^{\frac{3}{2}} - 9x + 724$.

Найдём производную: $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9$. Вычислим нули производной: $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9 = 0$; $x^{\frac{1}{2}} = 6$; $x = 36$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 118).

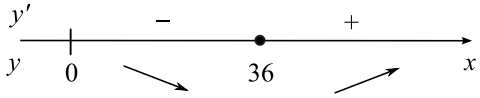


Рис. 118

Из рисунка видно, что точка $x = 36$ является единственной точкой минимума заданной функции.

Ответ: 36.

13. а) Используя формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение так, чтобы в нём была только одна тригонометрическая функция (синус) с одинаковым аргументом (x). Сделав замену $\sin x = t$, получим квадратное уравнение, решив которое вернёмся к переменной x.

$1 - 2(1 - \sin^2 x) - \sin(\pi - x) = 0$, $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Пусть $\sin x = t$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$\sin x = 1$, тогда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$,

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$, тогда $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{9\pi}{2}; \dfrac{13\pi}{2}\right)$, найдём с помощью тригонометрической окружности (см. рис. 119).

$\dfrac{9\pi}{2} \in \left[\dfrac{9\pi}{2}; \dfrac{13\pi}{2}\right)$;

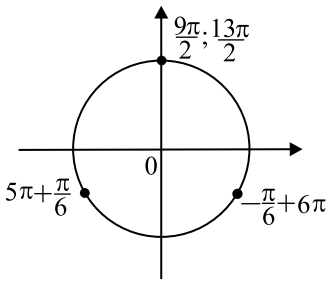


Рис. 119

$5\pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{31\pi}{6}$;

$6\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{35\pi}{6}$;

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $\dfrac{9\pi}{2}, \dfrac{31\pi}{6}, \dfrac{35\pi}{6}$.

14. а) Будем использовать метод координат. Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PM}$, а затем косинус угла между этими векторами. Выберем систему координат. Направим ось Ox вдоль AD, ось Oz вдоль AA_1 и ось $Oy \perp AD$ в плоскости ABC (см. рис. 120). A — начало координат.

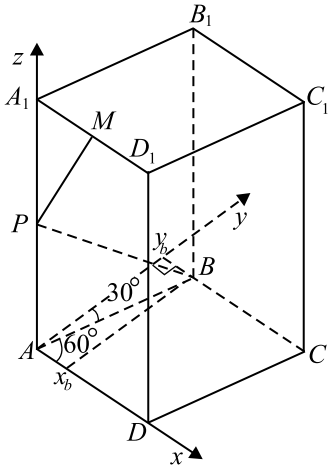


Рис. 120

Тогда $A(0;0;0)$; $A_1(0;0;8)$; $P(0;0;4)$; $M(4;0;8)$;
$B(BA\cos 60°; BA\sin 60°; 0)$, то есть $B(4;4\sqrt{3};0)$, $B_1(4;4\sqrt{3};8)$.

Найдём координаты векторов: $\overrightarrow{PM} = \{4;0;4\}$; $\overrightarrow{PB} = \{4;4\sqrt{3};-4\}$.

Пусть угол между $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PB}$ равен α.

Получаем: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PB}|} = \dfrac{4\cdot 4 + 0\cdot 4\sqrt{3} - 4\cdot 4}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PB}|} = 0.$

$\cos\alpha = 0$, значит, $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PB}$ и прямые PM и PB перпендикулярны.

б) Угол между плоскостями равен углу между ненулевыми векторами, перпендикулярными этим плоскостям (или, если угол тупой, смежному с ним углу). Такие вектора

называют нормалями к плоскостям. Найдём их. Пусть $\overrightarrow{n_1} = \{x; y; z\}$ перпендикулярен плоскости PMB. Найдём его, решив систему $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{PM}, \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{PB}. \end{cases}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PM} = 0, \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PB} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 0y + 4z = 0, \\ 4x + 4\sqrt{3}y - 4z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x, \\ y = \dfrac{-2x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Возьмём $x = 1; y = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}; z = -1$. $\overrightarrow{n_1} = \left\{1; \dfrac{-2}{\sqrt{3}}; -1\right\}$.

Пусть $\overrightarrow{n_2} = \{x; y; z\}$ перпендикулярен плоскости AA_1D. Найдём его, решив систему $\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AA_1}, \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AD}. \end{cases}$ $\overrightarrow{AA_1} = \{0; 0; 8\}$, $\overrightarrow{AD} = \{8; 0; 0\}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AD} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0x + 0y + 8z = 0, \\ 8x + 0y + 0z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Возьмём $x = 0; y = 1; z = 0$. $\overrightarrow{n_2} = \{0; 1; 0\}$.

Найдём косинус искомого угла β (он равен модулю косинуса угла между $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$).

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left|1 \cdot 0 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 - 1 \cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$\frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\dfrac{10}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $\beta = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

15. Будем использовать метод интервалов, предварительно найдя ОДЗ и нули левой части неравенства. Преобразуем неравенство.

$(6^x - 36)\sqrt{15 - x^2 - 2x} \geqslant 0$.

Найдём ОДЗ неравенства:

$-x^2 - 2x + 15 \geqslant 0$; $x^2 + 2x - 15 \leqslant 0$; $(x - 3)(x + 5) \leqslant 0$, $x \in [-5; 3]$.

Выражение $\sqrt{15 - x^2 - 2x}$ неотрицательно при любом допустимом значении x, значит неравенство выполняется при $6^x \geqslant 36$, $6^x \geqslant 6^2$, $x \geqslant 2$, а также если $\sqrt{15 - x^2 - 2x} = 0$; $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

Учтём ОДЗ (см. рис. 121) и найдём знаки левой части неравенства.

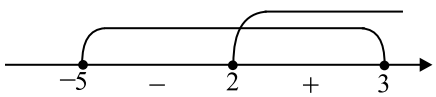


Рис. 121

$x \in [2;3] \cup \{-5\}$.

Ответ: $[2;3] \cup \{-5\}$.

16. а) Докажем, что $AF \perp EK$ и $AD = DK$, а затем воспользуемся свойством медианы FD прямоугольного треугольника AFK. $ABCD$ — прямоугольник, поэтому его углы прямые и $CB = AD$, $CD = AB$. $\angle EBC = \angle CDK = 90^\circ$ (см. рис. 122).

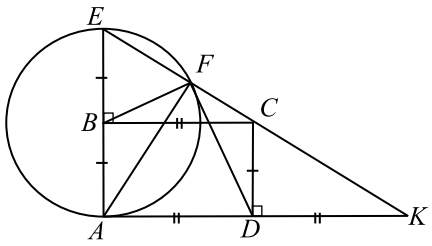


Рис. 122

$BE = BA$ как радиусы окружности. Получаем, что $BE = CD$.
$\angle BEC = \angle DCK$ как соответственные углы при $AB||CD$ (секущая EK).

$\triangle BEC = \triangle DCK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), значит, $BC = KD$. Но $BC = AD$, из этого получаем: $AD = DK$.

Проведём AF. $\angle AFE$ — вписанный, он опирается на диаметр, значит, $\angle AFE$ — прямой.
$\angle AFK = 180^\circ - \angle AFE = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике AFK медиана FD равна половине гипотенузы AK, значит, $FD = AD = DK$.

б) Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника CDK. $BF = AB = 20$ (радиусы), $AB = CD = 20$. $DF = DK = 21$ (см. пункт а)).
По теореме Пифагора $CK^2 = CD^2 + DK^2 = 20^2 + 21^2$, $CK = 29$.

Ответ: 29.

17. Предположим, что на оба вида вклада изначально положена одинаковая сумма. Обозначим её какой-нибудь буквой (например, a). Выразим через a величину вклада через три года в обоих случаях. Запишем неравенство, обозначающее, что на «Базовом» сумма больше, и решим его относительно p (величина a сократится). Найдём наименьшее целое значение p, принадлежащее решению. Пусть размер вклада равен a. Вклад «Базовый» через три года станет равен $(1{,}12)^3 a$. Вклад «Активный» через год будет $1{,}08a$, через 2 года будет $1{,}08a \cdot 1{,}1$, через 3 года — $1{,}08 \cdot 1{,}1a \cdot \dfrac{100+p}{100}$.

По условию вклад «Базовый» выгоднее, то есть можно записать неравенство $1{,}08 \cdot 1{,}1a \cdot \dfrac{100+p}{100} < (1{,}12)^3 a$. Решаем его и находим наибольшее целое p.

$1{,}188 \cdot \dfrac{100+p}{100} < (1{,}12)^3$, $100 + p < \dfrac{(1{,}12)^3 \cdot 100}{1{,}188}$.

Числитель дроби не делится нацело на знаменатель.
$100 + p < 118, \ldots$, отсюда $p \leqslant 18$.

Наибольшее целое p равно 18.

Ответ: 18.

18. В осях Oxy построим графики обоих уравнений для некоторых значений a. Заметим, что первое уравнение задаёт окружность, а для второго построим сначала график функции без внешнего модуля. Проанализируем, как изменяются графики в зависимости от a, и определим, в каких ситуациях графики пересекаются ровно в 3 точках. Найдём граничные значения a.

Построим графики уравнений системы.

1) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + 84 = a^2 + 18x$.

$x^2 - 18x + 81 + y^2 + 84 = a^2 + 81,\ (x-9)^2 + y^2 = a^2 - 3$. При $a^2 - 3 > 0$ это окружность с центром $(9;0)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2-3}$. При $a^2 = 3$ система несовместна (решение первого уравнения — пара $(9;0)$, эта пара не является решением второго уравнения).

2) $||x-8| - |x-6|| = y$.

Построим сначала график уравнения $y = |x-8| - |x-6|$ (см. рис. 123).

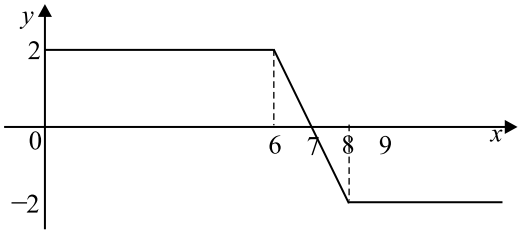


Рис. 123

При $x \leqslant 6\ \ y = -x + 8 + x - 6,\ y = 2$.

При $6 < x \leqslant 8\ \ y = -x + 8 - x + 6,\ y = -2x + 14$.

При $x > 8\ \ y = x - 8 - x + 6,\ y = -2$.

Отразим ту часть графика, где $y < 0$, относительно оси Ox и получим график $y = ||x-8| - |x-6||$ (см. рис. 124).

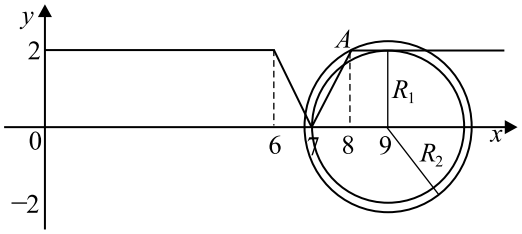


Рис. 124

3) Система имеет не менее 3 решений, если графики имеют не менее 3 точек пересечения. По рисунку видно, что это выполняется при $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$. При $R = R_1$ окружность касается прямой $y = 2,\ R_1 = 2$. $R = R_2$ — радиус окружности, которая проходит через точку $A(8;2)$. Найдём R_2.

$(x-9)^2 + y^2 = R_2^2,\ (8-9)^2 + 2^2 = R_2^2,\ R_2 = \sqrt{5}$.

Получим: $2 \leqslant R \leqslant \sqrt{5},\ 2 \leqslant \sqrt{a^2-3} \leqslant \sqrt{5},\ 4 \leqslant a^2 - 3 \leqslant 5$,

$7 \leqslant a^2 \leqslant 8,\ \sqrt{7} \leqslant |a| \leqslant 2\sqrt{2}.\ a \in [-2\sqrt{2}; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; 2\sqrt{2}]$.

Ответ: $[-2\sqrt{2}; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; 2\sqrt{2}]$.

19. а) Невозможно. Найдём сумму всех чисел в явном виде. Разобьём ряд на группы по 5 чисел. В первую группу войдут 5 крайних чисел, в следующую числа с 6-го по 10-е и

так далее. 2015 делится нацело на 5, поэтому весь ряд разделится на группы, число групп равно $2015 : 5 = 403$. По условию сумма чисел в каждой группе 20. Значит, сумма всего ряда $403 \cdot 20 = 8060$, и другая сумма получиться не может.

б) Возможно. Рассмотрим, например, ряд $8, 3, 3, 3, 3, 8, 3, 3, 3, 3, \ldots, 8, 3, 3, 3, 3, 8, 3$ состоящий из 403 пятёрок вида $8, 3, 3, 3, 3$, 2016-е число которого равно 8, а 2017-е равно 3. Тогда сумма всех чисел равна $(8 + 3 + 3 + 3 + 3) \cdot 403 + 8 + 3 = 8071$. Проверим, что условие выполняется. Среди любых последовательных пяти чисел 4 тройки и 1 восьмёрка, поэтому их сумма будет равна $4 \cdot 3 + 8 = 20$.

в) Будем исследовать возможные значения суммы в зависимости от остатка при делении n на 5. Если n делится на 5, то, как в пункте а), разобьём все числа ряда на пятёрки чисел. Сумма каждой пятёрки 20, а всего пятёрок $\frac{n}{5}$. Значит, сумма всего ряда $20 \cdot \frac{n}{5} = 4n$. Других сумм получиться не может.

Если n не делится на 5, то на пятёрки разобьются все числа, кроме одного, двух, трёх или четырёх крайних чисел (их количество равно остатку от деления n на 5). Сумма чисел, которые разбиты на пятёрки, всегда одинаковая. Поэтому на сумму ряда влияют только оставшиеся числа. Значит, вместо суммы всего ряда нужно находить количество различных значений для суммы оставшихся чисел. Обозначим 5 крайних чисел через a, b, c, d, e и разберём 4 случая:

1) Осталось 1 число: a. Числа a, b, c, d, e натуральные, то есть не меньше 1. Они последовательные, значит $a + b + c + d + e = 20$. Выразим отсюда $a \geqslant 1$ и получим: $1 \leqslant a = 20 - b - c - d - e \leqslant 20 - 4 = 16$. Всего от 1 до 16 — 16 различных значений.

2) Осталось 2 числа: a и b. Из того же рассуждения получим, что $a+b \geqslant 1+1$, $a+b \geqslant 2$ и $a + b = 20 - c - d - e \leqslant 20 - 3 = 17$. Всего от 2 до 17 — 16 различных значений.

3) Осталось 3 числа: a, b и c. Аналогично предыдущему $3 \leqslant a + b + c \leqslant 18$, снова 16 значений.

4) Осталось 4 числа: a, b, c и d. Аналогично предыдущему $4 \leqslant a+b+c+e \leqslant 19$, снова 16 значений.

Однако эти неравенства ещё не гарантируют, что такие ряды действительно существуют. Чтобы доказать, что все 16 значений действительно могут быть, нужно каждое возможное значение суммы подтвердить примером с нужной суммой крайних чисел.

Как построить примеры ряда так, чтобы условие про суммы пятёрок повторялось? Для этого, на самом деле, достаточно задать только 4 крайних числа a, b, c, d. Продолжить этот ряд так, чтобы условие выполнилось, можно единственным образом.

Сначала находим следующее число $e = 20 - a - b - c - d$, затем выражаем шестое число $f = 20 - b - c - d - e = a$ и так далее, пока не получим ряд нужной длины. Можно заметить, что, какие бы ни были выбраны числа вначале, числа ряда всегда повторяются через 5.

Действительно, по условию

$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} + a_{i+5}$, отсюда $a_i = a_{i+5}$.

Чтобы не строить пример отдельно для каждого варианта суммы, построим сразу серию из 16 примеров. Пусть t — произвольное натуральное число от 1 до 16. Начнём с чисел t, 1, 1, 1 и продолжим этот ряд вправо, пока не получим n чисел. Получим:

$t, 1, 1, 1, 17-t, t, 1, 1, 1, 17-t, t, 1, 1, 1, 17-t, \ldots$ То, какие числа стоят в конце ряда, зависит от остатка при делении n на 5, но на наше решение это влиять не будет.

Убедимся, что если n не делится на 5, то действительно существует 16 различных сумм. Разобьём числа на пятёрки. В зависимости от остатка при делении n на 5, неразбитыми останутся 1, 2, 3 или 4 числа.

Для остатка 1 — ряд

$t, \underbrace{\{1, 1, 1, 17-t, t\}, \ldots, \{1, 1, 1, 17-t, t\}}_{k \text{ пятёрок } (1,1,1,17-t,t)}, S = 20k + t.$

Для остатка 2 — ряд

$t, 1, \underbrace{\{1, 1, 17-t, t, 1\}, \ldots, \{1, 1, 17-t, t, 1\}}_{k \text{ пятёрок } (1,1,17-t,t,1)}, S = 20k + t + 1.$

Для остатка 3 — ряд

$t, 1, 1\underbrace{\{1, 17-t, t, 1, 1\}, \ldots, \{1, 17-t, t, 1, 1\}}_{k \text{ пятёрок } (1,17-t,t,1,1)}, S = 20k + t + 2.$

Для остатка 4 — ряд

$t, 1, 1, 1, \underbrace{\{17-t, t, 1, 1, 1\}, \ldots, \{17-t, t, 1, 1, 1\}}_{k \text{ пятёрок } (17-t,t,1,1,1)}, S = 20k + t + 3.$

Изменяя t от 1 до 16, получаем 16 различных значений для суммы не вошедших в пятёрки чисел, а значит, 16 различных значений для группы всех чисел.

Ответ: а) нет; б) да; в) 1, если n делится на 5; 16, если n не делится на 5.

Решение варианта 23

1. Смартфон подешевел на $4200 - 3738 = 462$ рубля.

$$\begin{array}{rcl} 4200 \text{ руб.} & — & 100\% \\ 462 \text{ руб.} & — & x\%, \end{array}$$

отсюда $x = (462 \cdot 100\%) : 4200 = 11\%$.

Ответ: 11.

2. Находим на диаграмме наибольшую и наименьшую среднемесячные температуры в период с марта по июнь 1975 года, они равны 18 °C и -6 °C. Их разность равна 24 °C.

Ответ: 24.

3. Построим высоту CH (см. рис. 125), $CH = 3$.

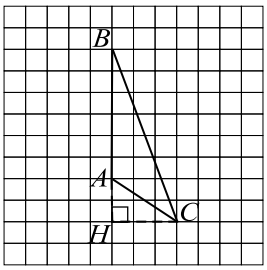


Рис. 125

Ответ: 3.

4. Исходом будем считать пару чисел: очки при первом и втором броске. Тогда указанному событию благоприятствуют следующие исходы: $1-6,\ 2-5,\ 3-4,\ 4-3,\ 5-2,\ 6-1$. Их количество равно 6.

Ответ: 6.

5. $(\sqrt[3]{2x-70})^3 = 10^3,\ 2x-70 = 1000,\ 2x = 1070,\ x = 535.$

Ответ: 535.

6. $\cos A = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$. В прямоугольном треугольнике с острым углом A (см. рис. 126)

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\dfrac{25}{26}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}.$

$\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{5}.\ \operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC},\ \dfrac{18}{AC} = \dfrac{1}{5},\ AC = 18 : \dfrac{1}{5} = 90.$

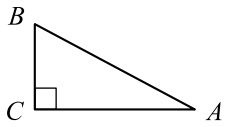


Рис. 126

Ответ: 90.

7. Прямая $y = 6$ параллельна оси Ox. Поэтому находим такие точки, в которых касательная к графику функции параллельна оси Ox. На данном графике такими точками являются точки экстремума (точки максимума или минимума). Как видим, точек экстремума 4.

Ответ: 4.

8. Объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, а h —высота пирамиды. Отсюда $h = \dfrac{3V}{S_{\text{осн.}}}$. Площадь основания является площадью прямоугольника со сторонами 6 и 8, поэтому $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 8 = 48$. Отсюда $h = \dfrac{3 \cdot 64}{48} = 4$.

Ответ: 4

9. $\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{5}\right)^2}{12+\sqrt{95}} = \dfrac{(\sqrt{19})^2 + 2\sqrt{19}\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{12+\sqrt{95}} = \dfrac{19+5+2\sqrt{19\cdot 5}}{12+\sqrt{95}} =$

$= \dfrac{24+2\sqrt{95}}{12+\sqrt{95}} = \dfrac{2(12+\sqrt{95})}{12+\sqrt{95}} = 2.$

Ответ: 2.

10. $v = \sqrt{2la},\ v^2 = 2la,\ a = \dfrac{v^2}{2l}$. Подставляем в эту формулу $l = 0{,}7,\ v = 98$: $a = \dfrac{98^2}{2 \cdot 0{,}7} = 6860$. Итак, ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,7 километра, приобрести скорость 98 км/ч, равно 6860 км/ч^2.

Ответ: 6860.

11. Обозначим скорость второго мотоциклиста через x км/ч, тогда по условию скорость первого мотоциклиста $(x + 40)$ км/ч. Время, затраченное на прохождение всего пути первым мотоциклистом, равно $\dfrac{171}{x+40}$ ч. Время, затраченное на прохождение всего пути вторым мотоциклистом, равно $\dfrac{171}{x}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{171}{x} - \dfrac{171}{x+40} = 2{,}5$,

$171(x + 40) - 171x = 2{,}5x(x + 40)$, $171x + 171 \cdot 40 - 171x = 2{,}5x^2 + 100x$,
$2{,}5x^2 + 100x - 171 \cdot 40 = 0$, $x^2 + 40x - 171 \cdot 16 = 0$,
$x_1 = 36$, $x_2 = -76$.

Отрицательная скорость не удовлетворяет условию. Скорость второго мотоциклиста 36 км/ч.

Ответ: 36.

12. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Найдём производную исходной функции:

$y' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 5 = \sqrt{x} - 5$. Вычислим нули производной: $\sqrt{x} - 5 = 0$; $\sqrt{x} = 5$; $x = 25$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 127).

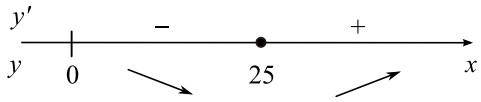


Рис. 127

Из рисунка видно, что точка $x = 25$ является единственной точкой минимума заданной функции.

Ответ: 25.

13. а) *План решения.*

1. Найдём ОДЗ.
2. Перейдём к логарифмам с одинаковым основанием.
3. Сделаем замену переменной так, чтобы получить квадратное уравнение.
4. Решим квадратное уравнение.
5. Вернёмся к исходной переменной.
6. Среди значений переменной, найденных на предыдущем шаге, отберём те, которые принадлежат ОДЗ.

Решение.

1. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

2. $\log_x^2 \sqrt{2} = 2 - \dfrac{\ln \sqrt{2}}{\ln x}$; $\log_x^2 \sqrt{2} = 2 - \log_x \sqrt{2}$, $\log_x^2 \sqrt{2} + \log_x \sqrt{2} - 2 = 0$.

3. Пусть $\log_x \sqrt{2} = t$.
$t^2 + t - 2 = 0$.

4. $t_1 = -2$; $t_2 = 1$.

5. $\log_x \sqrt{2} = -2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

$\log_x \sqrt{2} = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$.

6. $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и $x = \sqrt{2}$ принадлежат ОДЗ.

б) Так как в пункте а) было получено конечное число корней, то проверим каждый из них. Чтобы сравнить найденные значения корней с концами промежутка, при необходимости будем избавляться от иррациональностей путём возведения обеих частей проверяемых неравенств в соответствующую степень.

$\sqrt{2} > 1$, следовательно, $\sqrt{2} \notin (0{,}8; 1]$.

$\sqrt[4]{2} > 1$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} < 1$.

Проверим, выполняется ли неравенство $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} > 0{,}8 = \frac{4}{5}$. Это неравенство справедливо только в том случае, если $\sqrt[4]{2} < \frac{5}{4}$. Так как в левой и правой части последнего неравенства стоят положительные числа, то оно выполняется только если $(\sqrt[4]{2})^4 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$, то есть $2 < \frac{625}{256}$. Это неравенство справедливо, значит, $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} > 0{,}8$.

Ответ: а) $\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

14. а) *План решения.*

1. Выполним схематический чертёж.
2. Сделаем предположение, что $MK \perp BD$, и докажем это утверждение (например, методом «от противного»).
3. Обозначим ребро тетраэдра какой-нибудь буквой (например, a) и через неё выразим другие величины.
4. Рассмотрим треугольник AML, найдём его углы. Из равенства $\angle AML = \angle ALM$ сделаем вывод о том, что треугольник равнобедренный: $AL = AM$.
5. Найдём отношение $AB : AL$.

Решение.

1. Так как MK и AB лежат в плоскости ABD, то они пересекутся, L — точка их пересечения (см. рис. 128).
2. В $\triangle MDK$ $\angle MDK = 60°$, $MD = 2DK$, значит, $MK \perp BD$. Действительно, допустим, что это не так. Тогда опустим перпендикуляр MK', $MK' \perp BD$. В прямоугольном треугольнике $MK'D$ по определению косинуса $\frac{K'D}{MD} = \cos\angle MDK'$, $K'D = MD\cos 60° = \frac{1}{2}MD$. Но тогда точки K и K' совпадают. Получили противоре-

чие. Значит, $MK \perp BD$.

3. Обозначим $AB = AD = a$, тогда $MD = \frac{2}{3}a$, $DK = \frac{1}{3}a$, $AM = \frac{1}{3}a$.

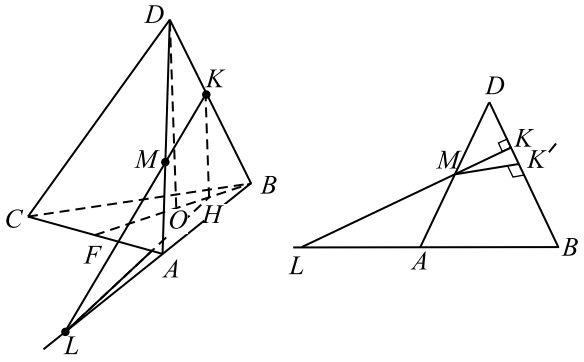


Рис. 128

4. $\angle DMK = 30°$. Следовательно, $\angle AML = 30°$ (по свойству вертикальных углов).
Так как $\angle MLA = 180° - \angle MAL - \angle AML = 180° - 120° - 30° = 30°$, то $\triangle AML$ — равнобедренный и $AL = AM = \frac{1}{3}a$.

5. Тогда $AB : AL = a : \frac{1}{3}a = 3$.

Замечание. Вместо рассуждений, проведённых в пункте 4, можно было рассмотреть прямоугольный треугольник LBK и воспользоваться свойством катета, лежащего против угла в 30°.

б) *План решения*.
1. Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Построим проекцию отрезка KL на плоскость ABC. Для этого опустим перпендикуляр KH, $KH \perp ABC$, точка H лежит в плоскости ABC. HL — проекция KL.
2. Найдём $\sin \angle KLH$ (из треугольника KHL) и по синусу угла определим угол. Для этого выполним следующие действия.

2.1. Пусть O — центр основания ABC тетраэдра. Из подобия треугольников KHB и DOB найдём KH (для этого найдём DO).

2.2. Из треугольника BKL найдём KL.

2.3. Из треугольника KHL найдём $\sin \angle KLH$ и $\angle KLH$.

Решение.
1. Искомый угол равен углу KLH.

2. Найдём $\sin \angle KLH = \frac{KH}{KL}$.

2.1. $\triangle KHB \sim \triangle DOB$. Следовательно,

$$KH = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}\sqrt{BD^2 - BO^2} = \frac{2}{3}\sqrt{BD^2 - \left(\frac{2}{3}BF\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot a.$$

2.2. В прямоугольном треугольнике BKL: $BL = \frac{4}{3}a$, $BK = \frac{2}{3}a$, найдём

$KL = \sqrt{BL^2 - BK^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

2.3. $\sin\angle KLH = \frac{KH}{KL} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\angle KLH = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

15. *План решения.*

1. Отдельно преобразуем числитель и знаменатель.

1.1. В числителе вынесем за скобки 5^x, чтобы в скобке осталась разность некоторого числа в степени x и константы (вместо этого можно вынести за скобки 3^x, а потом дополнительно преобразовать, или сразу вынести за скобки 3^{x+1}).

1.2. В знаменателе «избавимся» от $\log_2 5$ в показателе степени (преобразуем его в множитель). После этого получим квадратичное выражение от 2^x (если сделать замену $t = 2^x$, то получим квадратичное выражение от t). Квадратичное выражение разложим на множители.

2. Все множители в числителе и знаменателе заменим более простыми, совпадающими по знаку (в том числе равными нулю одновременно с исходными — таким образом, не надо будет дополнительно думать об ОДЗ).

3. Решим неравенство, полученное на предыдущем шаге, методом интервалов.

Решение.

1. $\dfrac{3^x - 5^{x+1}}{4^x - 2^{x+\log_2 5} + 4} \leqslant 0$; $\dfrac{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x - 5\right)\cdot 5^x}{2^{2x} - 5\cdot 2^x + 4} \leqslant 0$;

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 5}{(2^x - 4)(2^x - 1)} \leqslant 0.$$

2. $$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} 5}}{(2^x - 2^2)(2^x - 2^0)} \leqslant 0.$$

Выражения $\left(\frac{3}{5}\right)^x - 5$, $2^x - 2^2$, $2^x - 2^0$ совпадают по знаку с выражениями $\left(\frac{3}{5} - 1\right)\cdot(x - \log_{\frac{3}{5}} 5)$, $(2-1)\cdot(x-2)$ и $(2-1)\cdot(x-0)$ соответственно.

$$\frac{\left(\frac{3}{5} - 1\right)\cdot(x - \log_{\frac{3}{5}} 5)}{(2-1)\cdot(x-2)\cdot(2-1)\cdot(x-0)} \leqslant 0.$$

3. $\dfrac{x - \log_{\frac{3}{5}} 5}{(x-2)\cdot x} \geqslant 0$ (см. рис. 129).

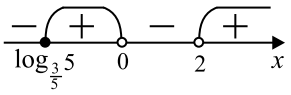


Рис. 129

$x \in [\log_{\frac{3}{5}} 5; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $[\log_{\frac{3}{5}} 5; 0) \cup (2; +\infty)$

16. а) *План решения.*
1. Сделаем чертёж (см. рис. 130), считая для определённости, что $AD > BC$ (для пункта а) это не имеет значения).
2. Заметим, что трапеция равнобедренная. Обозначим одну из сторон трапеции какой-либо буквой, выразим остальные стороны.
3. Выразим через ту же букву радиус окружности, описанной около трапеции: это можно сделать по теореме синусов для $\triangle ABD$.
4. Обозначим точкой N середину AD, точкой M — середину BC. Найдём CN.
5. Сравним CN с радиусом описанной окружности. Сделаем вывод, учитывая, что радиус описанной окружности лежит на прямой MN.

Решение.
1. Выполним чертёж (см. рис. 130).

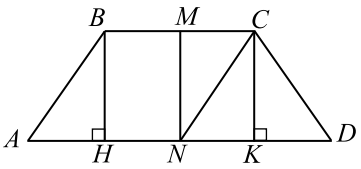


Рис. 130

2. Так как трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, то есть $AB = CD = a$. $\angle BAD = 60°$. Следовательно, $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, $KD = \frac{1}{2}a$. Так как в $ABCD$ вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$, отсюда $BC = \frac{1}{2}a$ и $AD = \frac{3}{2}a$.
3. Радиус описанной окружности трапеции $ABCD$ равен радиусу описанной окружности $\triangle ABD$. Из $\triangle ABD$ по теореме синусов $2R = \dfrac{BD}{\sin \angle BAD} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{BH^2 + HD^2} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}a, \quad R = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}a.$

4. Центр O описанной окружности трапеции $ABCD$ лежит на прямой MN, где M и N — середины BC и AD соответственно. $CN = \sqrt{CK^2 + NK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}a.$

5. Сравним CN и R, $\frac{\sqrt{13}}{4} > \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$, то есть $\sqrt{NM^2+MC^2} > \sqrt{OM^2+MC^2}$, отсюда $MN > OM$ или радиус описанной окружности лежит на прямой MN, а центр описанной окружности лежит внутри отрезка MN.

б) *План решения.*

1. Сделаем чертёж (см. рис. 131), обозначив центр вписанной окружности через O_1, а центр второй окружности — через O_2. Построим радиус $O_2T \perp AD$.

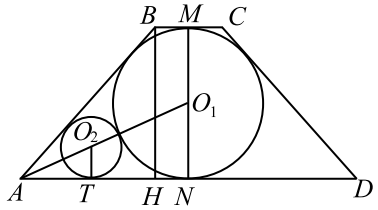


Рис. 131

2. Из подобных треугольников O_2AT и O_1AN, зная $\angle O_2AT$, вычислим O_2T.

3. Найдём искомое отношение $\frac{CD}{O_2T}$.

Решение.

1. Выполним чертёж (см. рис. 131).

2. $\triangle O_2AT \sim \triangle O_1AN$, тогда $\frac{O_1N}{O_2T} = \frac{AO_1}{AO_2}$. Обозначим искомый радиус O_2T через x, получим: $\frac{O_1N}{x} = \frac{AO_1}{AO_1 - O_1N - x}$. $BH = MN$, из $\triangle ABH$: $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle O_1AN = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ$. Тогда $AO_1 = 2O_1N$ (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы). Отсюда $\frac{O_1N}{x} = \frac{2O_1N}{O_1N - x}$, $\frac{1}{x} = \frac{2}{O_1N - x}$, $O_1N - x = 2x$, $x = \frac{1}{3}O_1N = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}MN = \frac{1}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, то есть $O_2T = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

3. $\frac{CD}{O_2T} = \frac{a}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

17. *План решения.*

Заметим, что в качестве единицы измерения удобнее (но не обязательно!) взять тысячу рублей, а не рубль, чтобы не иметь дела с большими числами.

1. Найдём, при какой величине текущей суммы выгоднее выбирать первый способ на-

числения прибыли, а при какой — второй. Определим, что, пока текущая сумма меньше 1000 тысяч рублей, выгоднее выбирать второй способ начисления прибыли, а когда она превысит 1000 тысяч, то первый. Если сумма равна 1000 тысяч, то схемы принесут одинаковую прибыль.

2. Попробуем решить задачу, предполагая, что сумма на счёте изначально не меньше 1000 тысяч. Получим противоречие.

3. Попробуем решить задачу, предполагая, что сумма на счёте изначально меньше 1000 тысяч, но после получения прибыли за первый год станет не меньше 1000 тысяч. Если получим противоречие, предположим, что сумма на счёте станет не меньше 1000 тысяч только после получения прибыли за второй год, и так далее, пока не получим подходящее решение.

Решение.

1. Пусть текущая сумма равна S тысяч рублей, $S > 0$.

$\left(1 + \frac{10}{100}\right)S \geqslant \left(1 + \frac{5}{100}\right)S + 50;$

$x \geqslant 1000$.

2. Пусть Иван положил в банк x тысяч рублей, $x > 0$.

Если $x \geqslant 1000$, то максимальная прибыль равна $1{,}1^4 \cdot x - x = 1{,}4641x - x = 0{,}4641x \geqslant 464{,}1$, что противоречит условию (по условию максимальная прибыль равна 417,967 тысяч рублей).

3.1. Если $x < 1000$, но $1{,}05x + 50 \geqslant 1000$, то максимальная прибыль равна $(1{,}05x + 50) \cdot 1{,}1^3 - x = 0{,}39755x + 66{,}55 = 417{,}967$, $x = \frac{351{,}417}{0{,}39755} < 900$. Но тогда $1{,}05x + 50 < 1{,}05 \cdot 900 + 50 < 1000$, что противоречит предположению.

3.2. $1{,}05x + 50 < 1000$ и $(1{,}05x + 50) \cdot 1{,}05 + 50 \geqslant 1000$. В этом случае максимальная прибыль равна

$((1{,}05x + 50) \cdot 1{,}05 + 50) \cdot 1{,}1^2 - x = 0{,}334025x + 124{,}025.$

Из уравнения $0{,}334025x + 124{,}025 = 417{,}967$ получим: $x = 880$ (тысяч рублей). Убедимся, что при этом значении x выполняются неравенства $1{,}05x + 50 < 1000$ и $(1{,}05x + 50) \cdot 1{,}05 + 50 \geqslant 1000$.

Ответ: 880 000.

18. $\frac{(2\sqrt{x} - a)(a - x)}{\sqrt{3 - a^2 - x^2}} \geqslant 0$. Попробуем преобразовать неравенство к более простому виду. Заметим, что знаменатель влияет только на ОДЗ. Поэтому неравенство равносильно системе $\begin{cases} (2\sqrt{x} - a)(a - x) \geqslant 0, \\ 3 - a^2 - x^2 > 0. \end{cases}$ Второе неравенство системы преобразуем так, чтобы получить неравенство для внутренней части круга. Первое неравенство преобразуем так, чтобы скобки выглядели симметрично $\begin{cases} (2\sqrt{x} - a)(x - a) \leqslant 0, \\ a^2 + x^2 < 3. \end{cases}$ $(*)$

Изобразим множество решений системы $(*)$ в системе координат Oxa (см. рис. 132). Решению соответствует заштрихованная область. При этом каждому фиксированному значению a соответствует горизонтальная прямая. При фиксированном значении a реше-

ниями системы $(*)$ будут x, равные абсциссам тех точек горизонтальной прямой, которые лежат в заштрихованной области.

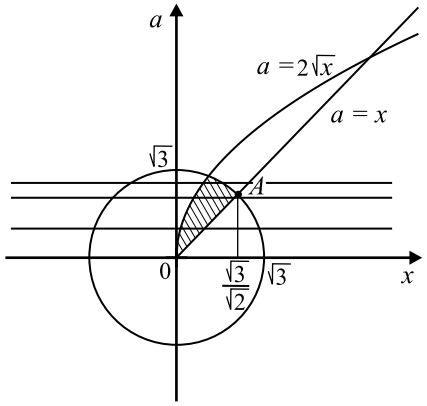


Рис. 132

Прямая $a = x$ пересекает окружность $x^2 + a^2 = 3$ при $a = x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

1) Из рисунка 132 видно, что если горизонтальная прямая $a = a_0$ лежит ниже (не выше) точки A, то отрезок этой прямой в заштрихованной области идёт от графика $a = 2\sqrt{x}$ до графика $a = x$.

2) Если же горизонтальная прямая $a = a_0$ лежит выше точки A, то отрезок этой прямой в заштрихованной области идёт от графика $a = 2\sqrt{x}$ до окружности $a^2 + x^2 = 3$, при этом точки самой окружности в заштрихованную область не входят.

Таким образом, в первом случае $\left(\text{то есть при } a \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ выполняется $a \leqslant 2\sqrt{x}$, $a \geqslant x$, следовательно, $x \in \left[\dfrac{a^2}{4};\ a\right]$.

При $a > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ решением является промежуток $\left[\dfrac{a^2}{4};\ \sqrt{3 - a^2}\right)$.

Отсюда решение содержит отрезок длиной не менее $\dfrac{1}{2}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ a - \dfrac{1}{4}a^2 \geqslant 0{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{3 - a^2} - \dfrac{a^2}{4} > 0{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ a^2 - 4a + 2 \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ 3 - a^2 > \left(\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решив системы, получим: $a \in \left[2 - \sqrt{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]$ или $a \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right)$, отсюда $a \in [2 - \sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Замечание. Задачу можно решить и другими способами, например аналитически. Получив систему (*), можно заметить, что первое неравенство системы при $a < 0$ не имеет решений, а при $a \geqslant 0$ имеет решением промежуток $\left[\frac{1}{4}a^2;\ a\right]$ (если $a \leqslant 4$) или промежуток $\left[a;\ \frac{1}{4}a^2\right]$ (если $a > 4$). Решением второго неравенства будут x, удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{3-a^2}$. Отсюда, в частности, $a \leqslant \sqrt{3}$, то есть случай $a > 4$ не возможен.

Несложно убедиться, что при ограничениях $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$ для решения задачи достаточно решить систему

$$\begin{cases} a - \frac{1}{4}a^2 \geqslant 0{,}5, \\ \sqrt{3-a^3} - \frac{a^2}{4} > 0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [2-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

19. а) Один из самых простых способов проверить, является ли натуральное число простым, — это проверить его чётность. Среди чётных чисел простым является только 2.

Пусть d — разность арифметической прогрессии. Тогда $a_{n+2} = a_n + 2d$ и d — целое ненулевое число ($d = a_2 - a_1$), значит, a_n и a_{n+2} — различные числа одинаковой чётности. Отсюда $c_n = a_n^2 + a_{n+2}^2$ чётно и больше 2 (действительно, сумма квадратов двух различных нечётных натуральных чисел не меньше $1^2 + 3^2$, аналогично рассматриваются квадраты чётных чисел). Значит, c_n не является простым ни при каком n.

б) $S_k = b_1(1 + q + \ldots + q^{k-1})$, где q — знаменатель прогрессии. Будем рассматривать только случай $b_1 = 1$ (иначе существует не более одного простого числа среди S_k, хотя ровно одно (b_1) может быть простым). Вспомним, что число 1 к простым по определению не относится.

Заметим, что если q — нечётно, то все b_k нечётны, а потому чётность чисел S_k будет чередоваться, при этом при $k > 2$ для всех S_k выполняется неравенство $S_k \geqslant 1 + 3 > 2$. Значит, среди S_k существует не более одного простого числа подряд.

Если же q — чётное и простое, то $q = 2$. Тогда $S_k = 2^k - 1$. В частности, $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 7$, $S_4 = 15$ и т. д.

Но 2^{2n} имеет остаток 1 при делении на 3, значит, S_{2n} делится на 3. То есть при $k > 2$ любые члены S_k и S_{k+1} больше 3 и один из них делится на 3, то есть не более 1 простого числа подряд. При $k = 2$ числа S_k и S_{k+1} равны соответственно числам 3 и 7, то есть являются простыми. Таким образом, два простых числа подряд. Так как число 1 не является простым, то трёх простых членов подряд среди S_k нет.

Итак, среди чисел S_k возможно не более двух простых чисел подряд. Пример: $b_1 = 1$, $q = 2$; члены S_2 и S_3 — простые числа.

в) Здесь также будем рассматривать только случай $b_1 = 1$.
$c_n = n + q^n + q^{n+1}$.

Очевидно, что в последовательности чисел c_n чередуется чётность членов. Так как при этом все $c_n > 2$, то возможно не более одного простого числа c_n подряд.
Пример простого члена c_n: $q = 2$, $n = 1$, $c_1 = 7$.

Ответ: а) 0; б) 2; в) 1.

Решение варианта 24

1. Смартфон подешевел на $3900 - 3354 = 546$ рублей.

$$\begin{array}{rcl} 3900 \text{ руб.} & — & 100\% \\ 546 \text{ руб.} & — & x\%, \end{array}$$

отсюда $x = (546 \cdot 100\%) : 3900 = 14\%$.

Ответ: 14.

2. Находим на диаграмме наибольшую и наименьшую среднемесячные температуры в период с июля по ноябрь 1975 года, они равны 16 °C и -6 °C. Их разность равна 22 °C.

Ответ: 22.

3. Построим высоту CH (см. рис. 133), $CH = 4$.

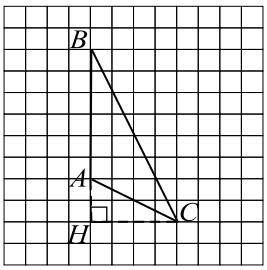


Рис. 133

Ответ: 4.

4. Исходом будем считать пару чисел: очки при первом и втором броске. Тогда указанному событию благоприятствуют следующие исходы: $4-6$, $5-5$, $6-4$. Их количество равно 3.

Ответ: 3.

5. $(\sqrt[3]{4x+45})^3 = (-5)^3$, $4x + 45 = -125$, $4x = -170$, $x = -42{,}5$.

Ответ: $-42{,}5$.

6. Рассмотрим треугольник CBH (см. рис. 134). $\angle BCH = 90^\circ - \angle B = \angle A$. В прямоугольном треугольнике ABC $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$.

$\cos A = \sqrt{1 - \dfrac{207}{256}} = \dfrac{7}{16}$. Тогда $\dfrac{CH}{CB} = \cos A$

и $CH = CB \cos A = 8 \cdot \dfrac{7}{16} = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

7. Равенство нулю производной в точке означает, что касательная к графику функции, проведённая в этой точке, параллельна оси Ox. Поэтому находим такие точки, в которых касательная к графику функции параллельна оси Ox. На данном графике такими точками

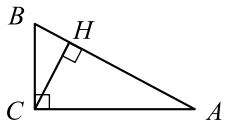


Рис. 134

являются точки экстремума (точки максимума или минимума). Как видим, точек экстремума 5.

Ответ: 5.

8. Объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, а h —высота пирамиды, равная 9. На рисунке, приведённом в условии задачи, SH — высота пирамиды и $HG \perp BC$. Покажем, что угол SAH является линейным углом двугранного угла между плоскостью ABS и плоскостью основания ABC, которые пересекаются по прямой AB. $AH \perp AB$, так как основание призмы является прямоугольником. AH является проекцией наклонной AS. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AS \perp AB$. Отсюда $\frac{SH}{AH} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\frac{9}{AH} = \sqrt{3}$, $AH = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$, $AD = 2AH = 6\sqrt{3}$. Аналогично убеждаемся, что угол SGH равен 60° и $HG = 3\sqrt{3} = BC$. Следовательно, стороны прямоугольника, лежащего в основании, равны $3\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Значит, $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 9 = 162$.

Ответ: 162.

9. $\frac{\left(\sqrt{17}+\sqrt{3}\right)^2}{10+\sqrt{51}} = \frac{(\sqrt{17})^2 + 2\sqrt{17}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{10+\sqrt{51}} = \frac{17+3+2\sqrt{17\cdot 3}}{10+\sqrt{51}} =$

$= \frac{20+2\sqrt{51}}{10+\sqrt{51}} = \frac{2(10+\sqrt{51})}{10+\sqrt{51}} = 2.$

Ответ: 2.

10. $v = \sqrt{2la}$, $v^2 = 2la$, $a = \frac{v^2}{2l}$. Подставляем в эту формулу $l = 0{,}9$, $v = 99$: $a = \frac{99^2}{2 \cdot 0{,}9} = 5445$. Итак, ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 99 км/ч, равно 5445 км/ч^2.

Ответ: 5445.

11. Обозначим скорость второго велосипедиста через x км/ч. Тогда скорость первого $(x+3)$ км/ч, а время первого велосипедиста на прохождение всего пути $\frac{21}{x+3}$ ч, время второго велосипедиста, затраченное на прохождение всего пути, $\frac{21}{x}$ ч. Разница во времени равна 10 мин $= \frac{1}{6}$ часа.

Составим и решим уравнение: $\frac{21}{x} - \frac{21}{x+3} = \frac{1}{6}$,

$6(21(x+3)-21x)=x(x+3)$,
$x^2+3x-378=0,\ x_1=18,\ x_2=-21$.

Отрицательная скорость не удовлетворяет условию задачи. Скорость второго велосипедиста равна 18 км/ч.

Ответ: 18.

12. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Найдём производную исходной функции:

$y' = 8 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 8 - \sqrt{x}$. Вычислим нули производной: $8 - \sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 8$; $x = 64$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 135).

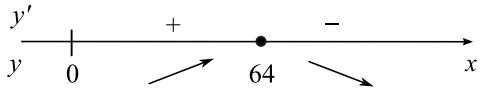


Рис. 135

Из рисунка видно, что точка $x = 64$ является единственной точкой максимума заданной функции.

Ответ: 64.

13. а) *План решения.*

1. Найдём ОДЗ.
2. Перейдём к логарифмам с одинаковым основанием.
3. Сделаем замену переменной так, чтобы получить квадратное уравнение.
4. Решим квадратное уравнение.
5. Вернёмся к исходной переменной.
6. Среди значений переменной, найденных на предыдущем шаге, отберём те, которые принадлежат ОДЗ.

Решение.

1. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

2. $2\log_x^2 \sqrt{5} = \frac{5 \ln \sqrt{5}}{\ln x} - 2$; $2\log_x^2 \sqrt{5} - 5\log_x \sqrt{5} + 2 = 0$.

3. Пусть $t = \log_x \sqrt{5}$.
$2t^2 - 5t + 2 = 0$.

4. $t = \frac{1}{2}$; $t = 2$.

5. $\log_x \sqrt{5} = 2$, $x = \sqrt[4]{5}$;

$\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, $x = 5$.

6. Значения $x = \sqrt[4]{5}$ и $x = 5$ принадлежат ОДЗ.

б) $5 \in (1{,}5; 7]$.

Ясно, что $\sqrt[4]{5} < 5 < 7$. Сравним числа $\sqrt[4]{5}$ и $\frac{3}{2}$. В качестве гипотезы предположим, например, что $\sqrt[4]{5} < \frac{3}{2}$, и проверим, справедлива ли эта гипотеза. Числа $\sqrt[4]{5}$ и $\frac{3}{2}$ положи-

тельны, значит, неравенство $\sqrt[4]{5} < \frac{3}{2}$ выполняется, только если $(\sqrt[4]{5})^4 < \left(\frac{3}{2}\right)^4$, то есть $5 < \frac{81}{16}$. Данное неравенство верно, значит, $\sqrt[4]{5} < 1{,}5$, $\sqrt[4]{5} \notin (1{,}5; 7]$.

Если бы в качестве гипотезы было взято неравенство $\sqrt[4]{5} \geqslant \frac{3}{2}$, то аналогично получили бы противоречие, откуда следовало бы противоположное неравенство: $\sqrt[4]{5} < \frac{3}{2}$.

Ответ: а) $\sqrt[4]{5}$; 5; б) 5.

14. а) *План решения.*

1. Выполним схематический чертёж.
2. Докажем, что $KM \perp CS$ методом «от противного». Для этого:

2.1. Предположим, что это неверно, построим перпендикуляр $KM' \perp CS$.

2.2. Найдём SM' как $SK \cos \angle KSM'$ (перед этим из треугольника BSC по теореме косинусов найдём $\cos \angle BSC$, так как $\angle BSC = \angle KSM'$).

2.3. Найдём SM.

2.4. Из равенства $SM' = SM$ сделаем вывод о том, что точки M и M' совпадают, а значит, предположение неверно и $KM \perp SC$.

Решение.

1. Выполним чертёж (см. рис. 136).

2.1. Предположим, что $\angle SMK \neq 90^\circ$. Построим $KM' \perp CS$.

2.2. $\cos \angle KSM = \cos \angle BSC = \dfrac{BS^2 + SC^2 - BC^2}{2BS \cdot SC} =$

$= \dfrac{25 \cdot 6 + 25 \cdot 6 - 100}{2 \cdot 5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3}.$

$SM' = \dfrac{2}{3} SK = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot 5\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$

2.3. Из условия $SM = \dfrac{2}{5} \cdot 5\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

2.4. $SM = SM'$. Следовательно, точки M и M' совпадают. Противоречие, значит, $\angle SMK = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

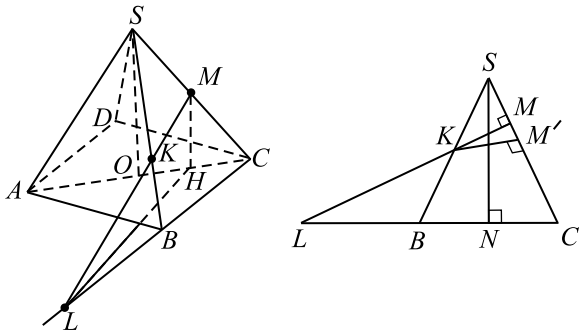


Рис. 136

б) *План решения.*

1. Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Продолжим KM до пересечения с BC, L — точка пересечения. Построим проекцию отрезка ML на плоскость ABC. Для этого опустим перпендикуляр MH, $MH \perp ABC$, точка H лежит в плоскости ABC. HL — проекция ML.

2. Найдём $\sin\angle MLH$ (из треугольника MHL) и по синусу угла определим угол. Для этого выполним следующие действия.

2.1. Пусть O — центр основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$. Из подобия треугольников MHC и SOC найдём MH (для этого вначале следует найти SO).

2.2. Из прямоугольного треугольника MLC найдём ML.

2.3. Из треугольника MHL найдём $\sin\angle MLH$ и $\angle MLH$.

Решение.

1. Пусть L — точка пересечения KM и BC (см. рис. 136), H — проекция точки M на плоскость ABC, тогда MLH — искомый.

2. Найдём $\sin\angle MLH = \dfrac{MH}{ML}$.

2.1. $\triangle MHC \sim \triangle SOC$,

$$MH = \frac{3}{5}SO = \frac{3}{5}\sqrt{SC^2 - CO^2} = \frac{3}{5}\sqrt{SA^2 - \left(AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \sqrt{150 - 50} = 6.$$

2.2. Пусть SN — высота $\triangle SBC$ (см. рис. 136).

$$\cos\angle MCL = \cos\angle SCB = \frac{CN}{SC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{SC} = \frac{5}{5\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$LC = \frac{MC}{\cos\angle MCL} = \frac{\frac{3}{5}CS}{\cos\angle MCL} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 5\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{6}}} = 3 \cdot 6 = 18,$$

$$ML = \sqrt{LC^2 - MC^2} = \sqrt{324 - 54} = 3\sqrt{30}.$$

2.3. $\sin\angle MLH = \dfrac{MH}{ML} = \dfrac{6}{3\sqrt{30}} = \dfrac{2}{\sqrt{30}}$,

$$\angle MLH = \arcsin\frac{2}{\sqrt{30}}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{30}}$.

15. *План решения.*

1. Отдельно преобразуем числитель и знаменатель.

1.1. В числителе «избавимся» от $\log_3 10$ в показателе степени (преобразуем его в множитель). После этого получим квадратичное выражение от 3^x (если сделать замену

$t = 3^x$, то получим квадратичное выражение от t). Квадратичное выражение разложим на множители.

1.2. В знаменателе вынесем за скобки 2^x, чтобы в скобке осталась разность некоторого числа в степени x и константы (вместо этого можно вынести за скобки 7^x, а потом дополнительно преобразовать, или сразу вынести за скобки 7^{x+3}).

2. Все множители в числителе и знаменателе заменим более простыми, совпадающими по знаку (в том числе равными нулю одновременно с исходными — таким образом, не надо будет дополнительно думать об ОДЗ).

3. Решим неравенство, полученное на предыдущем шаге, методом интервалов.

Решение.

1. $\dfrac{9^x - 3^{x+\log_3 10} + 9}{7^x - 2^{x+3}} \leqslant 0$; $\dfrac{3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9}{2^x \cdot \left(\left(\dfrac{7}{2}\right)^x - 8\right)} \leqslant 0$; $\dfrac{(3^x - 1)(3^x - 9)}{\left(\dfrac{7}{2}\right)^x - 8} \leqslant 0$;

$$\frac{(3^x - 3^0)(3^x - 3^2)}{\left(\frac{7}{2}\right)^x - \left(\frac{7}{2}\right)^{\log_{\frac{7}{2}} 8}} \leqslant 0.$$

2. Выражения $3^x - 1$, $3^x - 9$, $\left(\dfrac{7}{2}\right)^x - 8$ совпадают по знаку с выражениями $(3-1)(x-0)$, $(3-1)(x-2)$, $\left(\dfrac{7}{2} - 1\right)(x - \log_{\frac{7}{2}} 8)$ соответственно.

$$\frac{(3-1)(x-0)(3-1)(x-2)}{\left(\frac{7}{2} - 1\right)(x - \log_{\frac{7}{2}} 8)} \leqslant 0.$$

3. $\dfrac{x(x-2)}{x - \log_{\frac{7}{2}} 8} \leqslant 0$ (см. рис. 137).

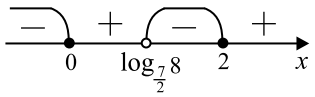


Рис. 137

$x \in (-\infty;\ 0] \cup (\log_{\frac{7}{2}} 8;\ 2]$.

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup (\log_{\frac{7}{2}} 8;\ 2]$.

16. а) *План решения.*

1. Заметим, что трапеция равнобедренная. Сделаем чертёж (см. рис. 138).
Обозначим одну из сторон трапеции какой-либо буквой, выразим остальные стороны.

2. Из треугольника ABD по теореме косинусов найдём косинус $\angle ABD$. Косинус получится положительный, значит, угол — острый. (Для того чтобы воспользоваться теоремой косинусов, необходимо найти BD, что можно сделать по теореме Пифагора для треугольника BHD, проводим высоту трапеции BH.)

Решение.

1. Так как трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, то есть $AB = CD = a$ (см. рис. 138). $\angle BAD = 60°$. Следовательно, $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, $KD = \frac{1}{2}a$. В $ABCD$ вписана окружность, значит, $AB + CD = BC + AD$, отсюда $BC = \frac{1}{2}a$ и $AD = \frac{3}{2}a$. Из $\triangle ABH$: $BH = AH \operatorname{tg} 60°$, $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $HK = BC = \frac{1}{2}a$, $HD = HK + KD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

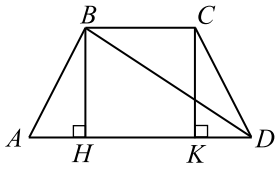


Рис. 138

2. По теореме косинусов $\cos \angle ABD = \dfrac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD}$.

$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$, тогда

$$\cos \angle ABD = \frac{a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{1}{2\sqrt{7}} > 0,$$ значит, $\angle ABD$ — острый.

б) *План решения.*

1. Сделаем чертёж (см. рис. 139). O — центр вписанной окружности трапеции.
2. Найдём радиус вписанной окружности трапеции как половину высоты трапеции.
3. Найдём диаметр KM второй окружности, $KM = KO + OM$. KO — радиус вписанной окружности. $OM = OB \cdot \sin \angle OBM$, $\angle OBM = \angle OBC - \angle DBC$.
4. Найдём искомое отношение.

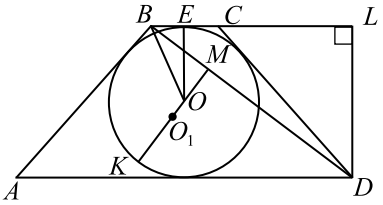


Рис. 139

Решение.

1. Выполним чертёж (см. рис. 139). Пусть $r_{\text{вп.}}$ — радиус вписанной окружности трапеции.

2. $r_{\text{вп.}}$ равен половине высоты трапеции, то есть $r_{\text{вп.}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Диаметр KM указанной окружности можно представить в виде $KM = OK + OM = r_{\text{вп.}} + OM$.

3. $OM = OB \sin \angle OBM$, $\angle OBM = \angle OBC - \angle DBC$, $\angle OBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$, так как центр вписанной окружности лежит на биссектрисе $\angle ABC$.

Чтобы воспользоваться формулой синуса разности, надо найти синус и косинус $\angle DBC$. Для этого проведём высоту DL трапеции и рассмотрим $\triangle DBL$.

Из $\triangle BLD$ получим, что $\sin \angle DBL = \dfrac{DL}{BD} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$\cos \angle DBL = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

$\sin \angle OBM = \sin\Big(60^\circ - \angle DBC\Big) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Из $\triangle BEO$ $OB = \dfrac{EO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{2}$, $EO = r_{\text{вп.}}$, следовательно, $OM = BO \sin \angle OBM = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}a$.

$KM = OK + OM = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}a + \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}(1 + \sqrt{7})$.

4. Искомая величина равна

$$\frac{r_{\text{вп.}}}{\frac{1}{2}KM} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8\sqrt{7}}{\sqrt{3}a(1+\sqrt{7})} = \frac{7-\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{7-\sqrt{7}}{3}$.

17. *План решения.*

Заметим, что в качестве единицы измерения удобнее (но не обязательно!) взять тысячу рублей, а не рубль, чтобы не иметь дела с большими числами.

1. Найдём, при какой величине текущей суммы выгоднее выбирать первый способ начисления прибыли, а при какой — второй. Определим, что, пока текущая сумма меньше 1500 тысяч рублей, выгоднее выбирать второй способ начисления прибыли, а когда она превысит 1500 тысяч, то первый. Если текущая сумма равна 1500 тысяч, то оба способа принесут одинаковую прибыль.

2. Попробуем решить задачу, предполагая, что сумма на счёте изначально не меньше 1500 тысяч. Получим противоречие.

3. Попробуем решить задачу, предполагая, что сумма на счёте изначально меньше 1500 тысяч, но после получения прибыли за первый год станет не меньше 1500 тысяч. Если получим противоречие, предположим, что сумма на счёте станет не меньше 1500 тысяч

только после получения прибыли за второй год, и так далее, пока не получим подходящее решение.

Решение.

1. Пусть текущая сумма равна S тысяч рублей, $S > 0$.
$\left(1 + \frac{20}{100}\right)S \geqslant \left(1 + \frac{10}{100}\right)S + 150;$
$x \geqslant 1500$.

2. Пусть Николай положил в банк x тысяч рублей, $x > 0$.

Если $x \geqslant 1500$, то максимальная прибыль равна $x \cdot (1{,}2)^4 - x = x \cdot 1{,}0736 > x \geqslant 1500$, это противоречит условию.

3. $x < 1500$, $1{,}1x + 150 \geqslant 1500$. В этом случае максимальная прибыль равна $(1{,}1x + 150) \cdot 1{,}2^3 - x = 0{,}9008x + 259{,}2$.

Из уравнения $0{,}9008x + 259{,}2 = 1430{,}24$ получим: $x = 1300$. Убедимся, что при этом значении x выполняется неравенство $1{,}1x + 150 \geqslant 1500$.

Ответ: 1 300 000.

18. $\frac{(x-a)(a-3\sqrt{x})}{\sqrt{12-x-2a}} \geqslant 0$. Попробуем преобразовать неравенство к более простому виду. Заметим, что знаменатель влияет только на ОДЗ. Поэтому неравенство равносильно системе $\begin{cases} (x-a)(a-3\sqrt{x}) \geqslant 0, \\ 12-x-2a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-a)(3\sqrt{x}-a) \leqslant 0, \\ 6 - \frac{1}{2}x > a. \end{cases} \quad (*)$

Изобразим множество решений системы $(*)$ в системе координат Oxa (см. рис. 140). Решению соответствует заштрихованная область. При этом каждому фиксированному значению a соответствует горизонтальная прямая. При фиксированном значении a решениями системы $(*)$ будут x, равные абсциссам тех точек горизонтальной прямой, которые лежат в заштрихованной области.

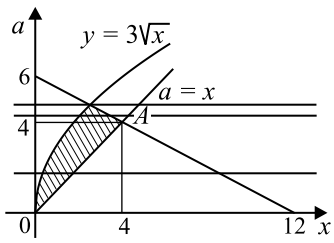


Рис. 140

Прямая $a = x$ пересекает прямую $a = 6 - \frac{1}{2}x$ при $a = x = 4$.

1) Из рисунка видно, что если горизонтальная прямая $a = a_0$ лежит ниже (не выше) точки A, то отрезок этой прямой в заштрихованной области идёт от графика $a = 3\sqrt{x}$ до графика $a = x$.

2) Если же горизонтальная прямая $a = a_0$ лежит выше точки A, то отрезок этой прямой в заштрихованной области идёт от графика $a = 3\sqrt{x}$ до прямой $a = 6 - \frac{1}{2}x$, при этом точки прямой $a = 6 - \frac{1}{2}x$ в заштрихованную область не входят.

Таким образом, в первом случае (то есть при $a \leqslant 4$) выполняется $a \leqslant 3\sqrt{x}$, $a \geqslant x$, следовательно, $x \in \left[\frac{a^2}{9};\ a\right]$.

При $a > 4$ решением является промежуток $\left[\frac{a^2}{9};\ 12 - 2a\right)$.

Отсюда решение содержит отрезок длиной не менее 2, если $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant 4, \\ a - \frac{a^2}{9} \geqslant 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 4, \\ 12 - 2a - \frac{a^2}{9} > 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Решив системы, получим: $a \in [3;\ 4]$ или $a \in (4;\ 3\sqrt{19} - 9)$, отсюда $a \in [3;\ 3\sqrt{19} - 9)$.

Замечание. Задачу можно решить и другими способами, например аналитически. Получив систему (*), можно заметить, что первое неравенство системы при $a < 0$ не имеет решений, а при $a \geqslant 0$ имеет решением промежуток $\left[\frac{a^2}{9};\ a\right]$ (если $a \leqslant 9$) или промежуток $\left[a;\ \frac{a^2}{9}\right]$ (если $a > 9$). Решением второго неравенства будут x, удовлетворяющие неравенству $x < 12 - 2a$, а отсюда, так как $x \geqslant 0$, выполняется $12 - 2a > 0$, $a < 6$, то есть случай $a > 9$ не возможен.

Несложно убедиться, что при ограничениях $0 \leqslant a \leqslant 6$ для решения задачи достаточно решить систему

$$\begin{cases} a - \frac{a^2}{9} \geqslant 2, \\ (12 - 2a) - \frac{a^2}{9} > 2. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [3;\ 3\sqrt{19} - 9)$.

19. а) Чтобы проверить, является ли натуральное число простым, можно попробовать представить его в виде произведения. Если найдётся несколько простых множителей, то число уже точно не будет простым. Поэтому разность квадратов преобразуем в произведение: $c_n = a_{n+7}^2 - a_n^2 = (a_{n+7} - a_n)(a_{n+7} + a_n) = 7d(a_{n+7} + a_n)$, где d — разность арифметической прогрессии. Отсюда c_n делится на 7. Так как числа a_{n+7} и a_n при $d \neq 0$ отличаются не менее чем на 7, то сумма $(a_{n+7} + a_n)$ больше единицы, отсюда $c_n > 7$. Значит, c_n не является простым ни при каком n. При $d = 0$ очевидно, что $c_n = 0$ — не является простым.

б) $d_k = b_1(1 + q^2 + \ldots + q^{2k-2})$, где q — знаменатель прогрессии. Если $b_1 \neq 1$, то не более одного простого члена среди d_k, так как все d_k делятся на b_1 и простым может быть только $d_1 = b_1$. Далее будем считать, что $b_1 = 1$.

Если q — нечётно, то $d_{2k} > 2$ и d_{2k} делится на 2, то есть не более одного простого члена подряд. Если q — чётно, то, в силу простоты q, $q = 2$. Проверка чётности и делимости на 3 не принесёт конкретных результатов (следует в этом убедиться), поэтому проверим делимость на следующее по порядку простое число, то есть на 5.

$2^{4k} = 16^k$ имеет остаток 1 при делении на 5, а $2^{4k+2} = 4 \cdot 16^k$ — остаток 4 при делении на 5, поэтому d_{2k} делится на 5. При $k > 1$ $d_{2k} > 5$, значит, d_{2k} не является простым и при $k > 2$ последовательность d_k имеет не более одного простого члена подряд. При $k = 2$ имеем $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 21$, и далее d_4 делится на 5, значит, последовательность d_k не может иметь соседних простых членов.

в) Здесь также будем рассматривать только случай $b_1 = 1$.
$c_n = 1 + 2q^n + 3q^{n+1}$.

Если q — нечётно, то все c_{2n} чётны и больше 2, значит, не являются простыми числами, то есть нет соседних простых чисел.

Если q — чётное и простое, то $q = 2$. Проверка чётности показывает, что все c_n нечётны и потенциально могут быть простыми. Значит, проверка чётности (делимости на 2) ничего конкретного не даёт, поэтому проверим делимость на следующее простое число, то есть на 3.

Тогда так как 2^{2n} имеет остаток 1 при делении на 3 и 2^{2n+1} имеет остаток 2 при делении на 3, то c_{2k} делится на 3. Так как при этом $c_{2k} > 3$, то c_{2k} не является простым. Таким образом, в последовательности c_k не может быть двух идущих подряд простых членов.

Подберём пример одного простого члена: $q = 2$, $n = 1$, $c_1 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 17$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 1.

Решение варианта 26

1. Наценка 20% означает, что цена продажи составляет $100\% + 20\% = 120\% = 1{,}2$ от закупочной цены. Магазин продаёт пакет молока за $34 \cdot 1{,}2 = 40{,}8$ руб.

Найдём число пакетов, которое можно купить на 300 рублей. $300 : 40{,}8 = \dfrac{125}{17} = 7\dfrac{6}{17}$.

Значит, наибольшее число пакетов равно 7.

Ответ: 7.

2. Находим на диаграмме наибольшую среднемесячную температуру во второй половине года, то есть с седьмого по двенадцатый месяц, она равна 16 °C.

Ответ: 16.

3. Длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна половине гипотенузы (см. рис. 141). Гипотенуза $AB = 7$. Медиана $CM = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

4. Всего возможны 8 исходов: РРР, РРО, РОР, РОО, ОРР, ОРО, ООР, ООО. Благоприятствуют событию «в первый и во второй раз выпадает решка» 2 исхода: РРО, РРР.

Искомая вероятность равна $\dfrac{2}{8} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

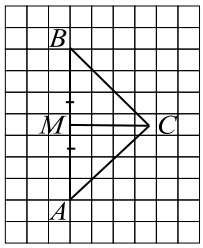


Рис. 141

5. $2^{2+x} = \frac{7}{2} \cdot 7^{2+x},\ \frac{2^{2+x}}{7^{2+x}} = \frac{7}{2},\ \left(\frac{2}{7}\right)^{2+x} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1},\ 2+x=-1,\ x=-3.$

Ответ: -3.

6. $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACH$ (см. рис. 142), поэтому

$\cos ACB = -\cos ACH = -\frac{HC}{AC}$.

По теореме Пифагора $HC^2 = AC^2 - AH^2 = 25^2 - 24^2 = 49,\ HC = 7$.

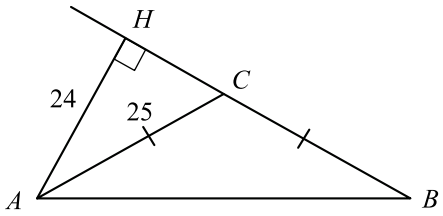


Рис. 142

$\cos ACB = -\frac{7}{25} = -0{,}28$.

Ответ: $-0{,}28$.

7. Из графика видно, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ больше нуля во всех точках промежутка $[-6;-2]$. Значит, на этом промежутке функция $f(x)$ возрастает. Поэтому наименьшее значение функции будет на левом конце промежутка, то есть в точке -6.

Ответ: -6.

8. Примем указанную в условии грань параллелепипеда за его основание. Тогда параллелепипед будет наклонной призмой, объём которой V находим по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, а h — высота призмы. Опустим из точки B_1 верхнего основания перпендикуляр B_1H на нижнее основание (см. рис. 143). Тогда B_1H будет высотой призмы, $B_1H = h$.

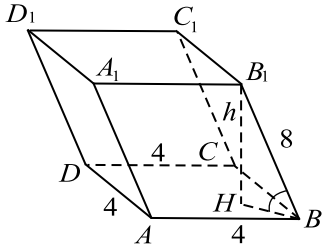


Рис. 143

$\angle B_1BH$ является углом между ребром B_1B и плоскостью основания, по условию он равен $60°$. Тогда $B_1H = BB_1 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Площадь основания, являющегося ромбом, находим по формуле $S_{\text{осн.}} = AB \cdot BC \cdot \sin 60° = 4 \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. Отсюда $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 96$.

Ответ: 96.

9. Если $\alpha \in \left(\dfrac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$, то $\sin\alpha > 0$.

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (-0{,}8)^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

$3\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right) = -3\sin\alpha = -3 \cdot 0{,}6 = -1{,}8$.

Ответ: $-1{,}8$.

10. Решим относительно t неравенство $h(t) \geqslant 4$.

$-2t^2+7t+1 \geqslant 4$, $2t^2-7t-1 \leqslant -4$, $2t^2-7t+3 \leqslant 0$. Найдём корни уравнения $2t^2-7t+3 = 0$: $t_{1,2} = \dfrac{7 \pm 5}{4}$, $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 3$.

$\left(t - \dfrac{1}{2}\right)(t - 3) \leqslant 0$, откуда $\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 3$. Мяч будет находиться на высоте не менее четырёх метров в течение $3 - \dfrac{1}{2} = 2{,}5$ секунды.

Ответ: 2,5.

11. Обозначим скорость автогонщика на пути из города A в город B через x км/ч, $x > 0$. Тогда его скорость на пути из города B в город A будет $(x + 22)$ км/ч. Время, затраченное автогонщиком на путь из города A до города B, равно $\dfrac{252}{x}$ ч, время движения на обратном пути $\dfrac{252}{x+22}$ ч. Остановка на обратном пути составляла 33 минуты $= \dfrac{11}{20}$ часа.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{252}{x} = \dfrac{252}{x+22} + \dfrac{11}{20}$, $\dfrac{252}{x} - \dfrac{252}{x+22} = \dfrac{11}{20}$,

$252(x + 22 - x) = \dfrac{11}{20}x(x + 22)$,

$x^2 + 22x - 10080 = 0$, $x_1 = 90$, $x_2 = -112$.

Скорость автогонщика на пути из города A в город B равна 90 км/ч.

Ответ: 90.

12. Найдём производную исходной функции, воспользовавшись формулой производной произведения:

$y'(x) = (x-9)'e^{2x+5} + (x-9)\left(e^{2x+15}\right)' = e^{2x+5} + (x-9) \cdot 2e^{2x+5} =$

$= (1 + 2x - 18)e^{2x+5} = (2x - 17)e^{2x+5}$.

$y'(x) = 0$ при $x = 8{,}5$. При этом $y'(x) < 0$ при $x < 8{,}5$, $y'(x) > 0$ при $x > 8{,}5$ (см. рис. 144).

Таким образом, $x = 8{,}5$ является единственной точкой минимума.

Ответ: 8,5.

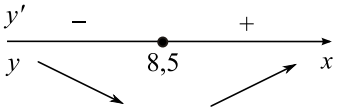


Рис. 144

13. а) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin 3\pi x = 0, \\ 1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg}\pi x \neq 0, \\ \sin \pi x \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3\pi x = \pi n,\ n \in Z \\ \operatorname{ctg}\pi x \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin \pi x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{n}{3},\ n \in Z \\ \operatorname{ctg}\pi x \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin \pi x \neq 0. \end{cases}$$

Если $n = 3m$, то $x = m$, $m \in Z$ и $\sin \pi m = 0$.
Значит, числа m, $m \in Z$ не являются решениями исходного уравнения. Если $n = 3m - 1$, то $x = -\dfrac{1}{3} + m$, $m \in Z$.

Тогда $\operatorname{ctg}\left(\pi \cdot \left(-\dfrac{1}{3} + m\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi m\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, ни одно из чисел $-\dfrac{1}{3} + m$, $m \in Z$ не входит в область допустимых значений переменной исходного уравнения.

Если $n = 3m - 2$, то $x = -\dfrac{2}{3} + m$, $m \in Z$.

Тогда $\operatorname{ctg}\left(\pi \cdot \left(-\dfrac{2}{3} + m\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{2\pi}{3} + \pi m\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Множество решений данного уравнения состоит из чисел $-\dfrac{2}{3} + m$, $m \in Z$.

б) Найдём корни в промежутке $\left[-1\dfrac{2}{5}; 2{,}5\right]$.

$-1\dfrac{2}{5} \leqslant -\dfrac{2}{3} + m \leqslant 2{,}5$; $m \in Z$.

$-\dfrac{11}{15} \leqslant m \leqslant 3\dfrac{1}{6}$, $m \in Z$. Отсюда находим $m_1 = 0$ и $x_1 = -\dfrac{2}{3}$; $m_2 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$; $m_3 = 2$ и $x_3 = \dfrac{4}{3}$; $m_4 = 3$ и $x_4 = \dfrac{7}{3}$.

Ответ: а) $-\dfrac{2}{3} + m$, $m \in Z$; б) $-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{7}{3}$.

14. а) Предположим, что точка M лежит внутри отрезка SA. Обозначим секущую плоскость через α (см. рис. 145). Так как $CN \perp \alpha$ и CN лежит в плоскости ABC, то $ABC \perp \alpha$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC, принадлежит плоскости α. Строим высоту SO пирамиды и проводим $MT \parallel SO$. Через точку T проводим $PQ \parallel AB$,

так как $PQ \perp CN$ и $AB \perp CN$. Строим $MR \parallel AB$. Так как $PQ \parallel AB$, то $MR \parallel PQ$. Трапеция $PMRQ$ — искомое сечение. Если точка M совпадает с S, то сечение — треугольник. Если точка M совпадает с A, то плоскость пересекает пирамиду по отрезку AB.

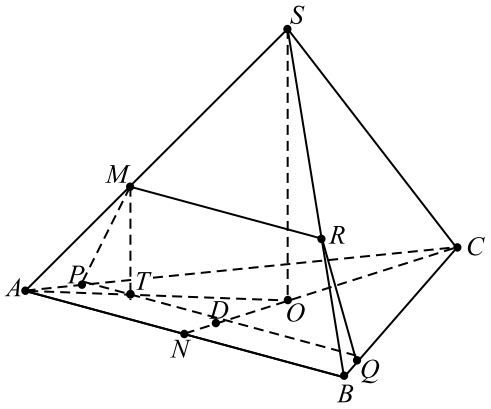


Рис. 145

б) Найдём площадь сечения. Длина $AO = \dfrac{AC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Высота пирамиды $SO = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Из подобия треугольников AOS и ATM получаем: $\dfrac{SO}{MT} = \dfrac{AS}{AM}$ или $\dfrac{2\sqrt{6}}{MT} = \dfrac{4}{1}$. Отсюда высота трапеции $MT = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Из подобия треугольников ABS и MRS получаем: $\dfrac{AB}{MR} = \dfrac{AS}{MS}$ или $\dfrac{6}{MR} = \dfrac{4}{3}$. Отсюда меньшее основание трапеции $MR = \dfrac{9}{2}$. Так как $MT \parallel SO$, то по теореме Фалеса имеем $\dfrac{AO}{AT} = \dfrac{AS}{AM} = \dfrac{4}{1}$, тогда для треугольников AON и TOD получаем: $\dfrac{NO}{ND} = \dfrac{AO}{AT} = \dfrac{4}{1}$. O — точка пересечения медиан, отсюда $\dfrac{NO}{OC} = \dfrac{1}{2}$. $NO = \dfrac{1}{3}NC$, $ND = \dfrac{1}{4}NO = \dfrac{1}{12}NC$, $CD = \dfrac{11}{12}NC$. Из подобия треугольников ABC и PQC получаем: $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{CN}{CD}$ или $\dfrac{6}{PQ} = \dfrac{12}{11}$. Отсюда большее основание трапеции $PQ = \dfrac{11}{2}$. Площадь трапеции $PMRQ$ равна $\dfrac{4{,}5 + 5{,}5}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: б) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

15. Найдём область определения неравенства.

$\begin{cases} x + 10 > 0, \\ 2^{x^2+2} - 2^x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x > -10, \\ x^2 + 2 \neq x; \end{cases} \begin{cases} x > -10, \\ x^2 - x + 2 \neq 0; \end{cases} \quad x > -10.$

Для решения данного неравенства применяем метод интервалов.

а) Пусть $f(x) = \dfrac{(|3x + 2| - x - 6) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x + 10) + 3)}{2^{x^2+2} - 2^x}$.

б) Область определения функции $f(x)$: $D(f) = (-10; +\infty)$.
в) Нули функции $f(x)$: $f(x) = 0$.

$$\frac{(|3x+2| - x - 6) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x+10) + 3)}{2^{x^2+2} - 2^x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|3x+2| - x - 6) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x+10) + 3) = 0, \\ x > -10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |3x+2| - x - 6 = 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+10) + 3) = 0, \end{array}\right. \\ x > -10. \end{cases}$$

Уравнение $|3x + 2| - x - 6 = 0$ или $|3x + 2| = x + 6$ равносильно системе

$$\begin{cases} (3x+2)^2 = (x+6)^2, \\ x + 6 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x + 6 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x + 10) + 3 = 0$ имеет корень $x = -2$.

г) Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. На каждом из промежутков $(-10; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак. Так как $f(-3) > 0$, $f(0) > 0$, $f(3) < 0$, то $f(x) \geqslant 0$ при всех значениях $x \in (-10; 2]$.

Ответ: $(-10; 2]$.

16. а) Так как $DB = BE$ по свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, то треугольник DBE равнобедренный (см. рис. 146). Значит, $\angle BDE = \angle BED$. Четырёхугольник $ADEC$ вписан в окружность, поэтому $\angle ACE + \angle ADE = 180°$, откуда $\angle ACB = 180° - \angle ACE = \angle ADE$. Аналогично $\angle BAC = \angle DEB$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC$.

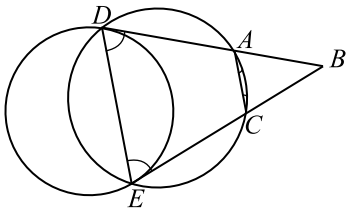


Рис. 146

б) Найдём высоту треугольника ABC, опущенную из точки B:

$$h_b = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{26^2 - 1^2} = 15\sqrt{3}.$$

Радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c и площадью S, равен:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4 \cdot 0{,}5 \cdot b \cdot h_b} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{26 \cdot 26}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{338\sqrt{3}}{45}.$$

Ответ: б) $\frac{338\sqrt{3}}{45}$.

17. Пусть x — количество акций предприятия A, y — количество акций предприятия B. Согласно условию задачи составим систему ограничений на переменные x и y:

$$\begin{cases} x + y = 6000, \\ 5x + 3y \leqslant 25\,000, \\ x \geqslant 1, \\ y \geqslant 1. \end{cases}$$

Прибыль от инвестиций составит $f = 1{,}1x + 0{,}9y$ (долларов). Из уравнения системы выразим $y = 6000 - x$ и подставим в выражение $f = 1{,}1x + 0{,}9y$ и неравенство $5x + 3y \leqslant 25\,000$. Получим линейную возрастающую функцию натурального аргумента $f(x) = 0{,}2x + 5400$ при условии $1 \leqslant x \leqslant 3500$. Наибольшее значение функции достигается при $x = 3500$: $f_{\text{наиб.}} = 0{,}2 \cdot 3500 + 5400 = 6100$. Тогда $y = 6000 - 3500 = 2500$.

Ответ: чтобы клиенту получить максимальную прибыль, необходимо приобрести 3500 акций предприятия A и 2500 акций предприятия B.

18. Изобразим множество решений первого неравенства на координатной плоскости Oxa, используя метод областей.

1) Пусть $F(x; a) = (a - x^2)(a + x - 2)$.

2) Выражение $F(x; a)$ определено при всех действительных значениях a и x.

3) Найдём нули: $F(x; a) = 0$.

$(a - x^2)(a + x - 2) = 0$; $a - x^2 = 0$ или $a + x - 2 = 0$; $a = x^2$ или $a = -x + 2$.

4) Построим параболу $a = x^2$ и прямую $a = -x + 2$ (пунктирными линиями) в системе координат Oxa (см. рис. 147).

Далее определяем знак значения выражения $F(x; a)$ в одной из областей $F(0; 1) < 0$, затем расставляем знаки в других областях, используя правило знакочередования. Области, выделенные знаком «минус», представляют графически множество решений первого неравенства.

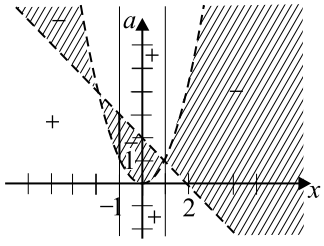


Рис. 147

Второе неравенство системы $x^2 \leqslant 1$ или $(x - 1)(x + 1) \leqslant 0$ задаёт на координатной плоскости Oxa вертикальную полосу вместе с границами $x = -1$ и $x = 1$. Множества решений первого и второго неравенств системы на плоскости Oxa не имеют общих точек при $a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

19. а) Если десятичная запись числа x содержит не более трёх цифр, то сумма этих цифр не превосходит 27. Следовательно, $x + S(x) < 2017$. Таким образом, x — четырёхзначное число, первая цифра которого равна 1 или 2, то есть $1 \leqslant S(x) \leqslant 28$, значит, $1989 \leqslant x \leqslant 2016$.

Согласно признаку делимости на 3 чи́сла x и $S(x)$ имеют одинаковые остатки от деления на 3. Если число x кратно 3, то $x = 3k$, $k \in N$ и $S(x) = 3m$, $m \in N$ и сумма $x + S(x)$ кратна 3. Но число 2017 не кратно 3. В данном случае уравнение не имеет решений.

Пусть $x = 3k+2$ и $S(x) = 3m+2$, тогда сумма $x+S(x)$, как и число 2017, при делении на 3 имеет остаток 1. Среди чисел от 1989 до 2016 остаток 2 при делении на 3 дают числа 1991, 1994, 1997, 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015. Проверив эти числа, убеждаемся, что подходят только 1994 и 2012.

Пусть $x = 3k+1$ и $S(x) = 3m+1$, тогда сумма $x+S(x)$ при делении на 3 имеет остаток 2, а число 2017 — остаток 1. В этом случае уравнение не имеет решений.

б) Согласно признаку делимости на 3 чи́сла x, $S(x)$ и $S(S(x))$ имеют одинаковые остатки от деления на 3. Значит, сумма $x + S(x) + S(S(x))$ делится на три. Число 2017 на 3 не делится, поэтому решений нет.

в) Число $x < 2017$. Среди чисел, меньших 2017, наибольшую сумму цифр 28 имеет число 1999. Так как $S(x) \leqslant 28$, $S(S(x)) \leqslant S(19) = 10$, $S(S(S(x))) \leqslant 9$, то $x = 2017 - S(x) - S(S(x)) - S(S(S(x))) \geqslant 2017 - 28 - 10 - 9 = 1970$.

Согласно признаку делимости на 9 чи́сла x, $S(x)$ и $S(S(x))$ и $S(S(S(x)))$ имеют одинаковые остатки от деления на 9. Число 2017 при делении на 9 даёт остаток 1, то есть имеет вид $9n + 1 = 9(n - 3) + 28$, поэтому число x должно давать остаток 7. Перебирая все возможные (от 0 до 8) остатки при делении на 9, убеждаемся, что сумма четырёх одинаковых остатков даёт остаток 1, только если они равны 7. Среди чисел от 1970 до 2016 остаток 7 при делении на 9 дают 1978, 1987, 1996, 2005, 2014. Проверив эти числа, убеждаемся, что подходит только 1978.

Ответ: а) 1994; 2012; б) нет решений; в) 1978.

Решение варианта 27

1. Расход электроэнергии за январь составляет $19\,801 - 19\,652 = 149$ киловатт-часов. По условию 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек, значит, за январь нужно заплатить $3{,}5 \cdot 149 = 521{,}5$ руб.

Ответ: 521,5.

2. Через отметку 8,0, соответствующую температуре 8,0 градусов (на вертикальной оси), проведём прямую, параллельную горизонтальной оси. Посчитаем месяцы, в которых значения температур были ниже этой прямой, используя диаграмму. Получилось 7 месяцев.

Ответ: 7.

3. Пусть L и G — внутренний и внешний круги соответственно.

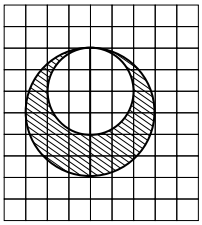


Рис. 148

Обозначим через a длину стороны одной клетки. Тогда, как видим из рисунка 148, радиус внутреннего круга L равен $2a$, а внешнего G — $3a$. Поэтому площадь внутреннего

круга $S_L = \pi(2a)^2$. По условию $4\pi a^2 = 4$. Значит, $\pi a^2 = 1$. Площадь внешнего круга $S_G = \pi(3a)^2 = 9\pi a^2 = 9 \cdot 1 = 9$.

Площадь заштрихованной фигуры равна $S_G - S_L = 9 - 4 = 5$.

Ответ: 5.

4. Пусть выбор места в микроавтобусе — исход, выбор места в первом микроавтобусе — благоприятный исход. Общее число исходов равно 50 (общее число мест), благоприятных исходов 10 (число мест на первом рейсе). По определению, вероятность равна $\dfrac{10}{50} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. По определению логарифма, $7 - x = 3^4,\ 7 - x = 81,\ x = -74$.

Ответ: -74.

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне, поэтому бóльшая высота проведена к меньшей стороне.

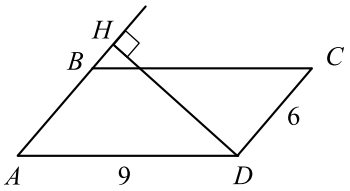


Рис. 149

Проведём высоту DH к меньшей стороне и рассмотрим треугольник ADH (см. рис. 149). $\sin A = \dfrac{DH}{AD}$. Получаем: $DH = AD \sin A = 9 \cdot \dfrac{2}{3} = 6$.

Ответ: 6.

7. Из графика видно, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ меняет знак с минуса на плюс (именно в таких точках будет минимум) ровно в одной точке $x = 2$ из промежутка $[-4; 3]$. Поэтому на промежутке $[-4; 3]$ ровно одна точка минимума.

Ответ: 1.

8. На рисунке 150 SO является высотой пирамиды $ABCD$, EK является перпендикуляром к плоскости $ABCD$ (значит, EK является высотой пирамиды $EABC$), поэтому $EK \| SO$ и SO и EK лежат в одной плоскости SOB.

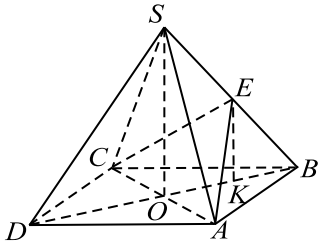


Рис. 150

Так как E является серединой SB, то EK является средней линией треугольника SOB, значит, $EK = \dfrac{1}{2}SO$. Пусть $SO = H$, тогда $EK = \dfrac{1}{2}H$.

Заметим также, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Тогда $V_{EABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} \cdot \frac{H}{2} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{4}V_{SABCD}$. Следовательно, $V_{EABC} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$.

Ответ: 4.

9. По формуле приведения и определению котангенса получаем:

$$6 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ = 6 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 24^\circ) = 6 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{ctg} 24^\circ = 6 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

10. Решим неравенство $I \leqslant 770$ относительно h, учитывая, что $m = 6$, $R = 12$, $M = 2$. $\frac{(6 + 2 \cdot 2) \cdot 12^2}{2} + 2(2 \cdot 12h + h^2) \leqslant 770$, $720 + 48h + 2h^2 \leqslant 770$, $h^2 + 24h - 25 \leqslant 0$, откуда $-25 \leqslant h \leqslant 1$. Максимальное значение h равно 1 сантиметру.

Ответ: 1.

11. Обозначим скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым, через x км/ч. Тогда скорость второго велосипедиста $(x-7)$ км/ч. Время, затраченное на весь путь первым велосипедистом, равно $\frac{225}{x}$ ч, вторым велосипедистом — $\frac{225}{x-7}$ ч. По условию $\frac{225}{x-7}$ больше, чем $\frac{225}{x}$, на 3,5 часа.

Получаем уравнение: $\frac{225}{x-7} - \frac{225}{x} = 3{,}5$, $\frac{450}{x-7} - \frac{450}{x} = 7$,

$450x - 450(x-7) = 7x(x-7)$, $7x^2 - 49x - 450 \cdot 7 = 0$, $x^2 - 7x - 450 = 0$,

$x_1 = 25$, $x_2 = -18$.

Согласно условию $x > 0$, поэтому скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым, равна 25 км/ч.

Ответ: 25.

12. Будем находить точку максимума функции с помощью производной. Найдём производную заданной функции, пользуясь формулами производной произведения, производной x^α и e^x:

$y'(x) = \Big((x+3)^2\Big)' e^{x-2016} + (x+3)^2\Big(e^{x-2016}\Big)' = 2(x+3)e^{x-2016} +$

$+ (x+3)^2 e^{x-2016} = (x+3)e^{x-2016}(2 + x + 3) = (x+3)(x+5)e^{x-2016}$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 151). Так как $e^{x-2016} > 0$ для любого x, то $y' = 0$ при $x = -3$, $x = -5$.

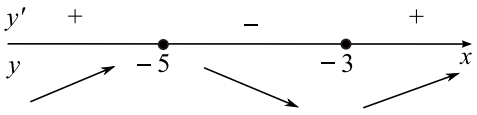


Рис. 151

Из рисунка видно, что функция $y = (x+3)^2 e^{x-2016}$ имеет единственную точку максимума $x = -5$.

Ответ: -5.

13. а) ОДЗ: $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

Исходное уравнение на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 2\sin^2 4x - 3\cos 4x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 0. \end{array}\right.$

Решим первое уравнение. Для этого сделаем замену $\cos 4x = t,\ t \in [-1; 1]$. Тогда $\sin^2 4x = 1 - t^2$. Получим:

$2(1 - t^2) - 3t = 0,\ 2t^2 + 3t - 2 = 0,\ t_1 = \dfrac{1}{2},\ t_2 = -2, t_2 \notin [-1;\ 1].$

$\cos 4x = \dfrac{1}{2},\ 4x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Решим второе уравнение.

$\operatorname{tg} x = 0,\ x = \pi k,\ k \in Z.$

При помощи единичной окружности найдём решения, которые удовлетворяют ОДЗ (см. рис. 152). Знаком «+» отмечены 1-я и 3-я четверти, в которых $\operatorname{tg} x > 0$.

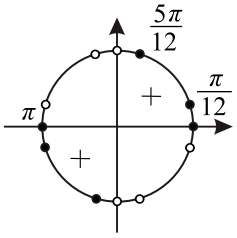


Рис. 152

Получим: $x = \pi k,\ k \in Z;\ x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z;\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m,\ m \in Z.$

б) Найдём корни, принадлежащие промежутку $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (см. рис. 153).

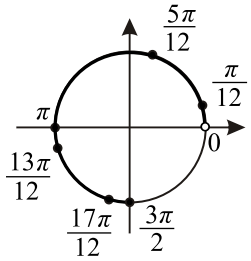


Рис. 153

$x = \dfrac{\pi}{12}; x = \dfrac{5\pi}{12}; x = \pi; x = \dfrac{13\pi}{12}; x = \dfrac{17\pi}{12}.$

Ответ: а) $\pi k,\ k \in Z; \dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z; \dfrac{5\pi}{12} + \pi m,\ m \in Z;$

б) $\pi; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{13\pi}{12}; \dfrac{17\pi}{12}.$

14. а) Плоскость AKC пересекает плоскость верхнего основания призмы по прямой, проходящей через точку K и параллельной AC (по свойству параллельности плоскостей). Тогда плоскость AKC пересекает ребро B_1C_1 в точке L так, что $KL \parallel AC$. Следовательно, искомым сечением будет трапеция $AKLC$ (см. рис. 154).

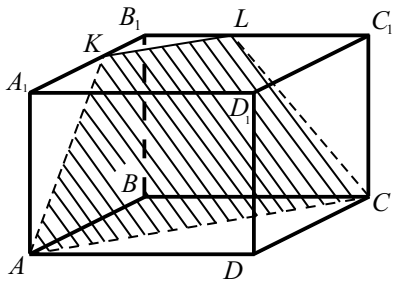


Рис. 154

б) $KB_1||AB$, $B_1L||BC$, $KL||AC$. Значит, треугольники KB_1L и ABC подобны и являются равнобедренными прямоугольными треугольниками. Тогда $KB_1 = B_1L$ и $A_1K = C_1L$. Треугольники AA_1K и CC_1L равны, следовательно, $AK = CL$ и трапеция $AKLC$ — равнобедренная.

Найдём площадь трапеции $AKLC$.

$A_1K = \frac{5}{8}A_1B_1 = \frac{5}{8} \cdot 8 = 5$; $AK = \sqrt{AA_1^2 + A_1K^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$.

$AC = AB\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$; $KL = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{8} \cdot 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

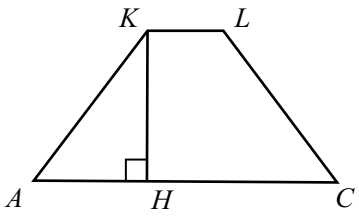


Рис. 155

Так как трапеция $AKLC$ — равнобедренная (см. рис. 155), имеем

$AH = \frac{AC - KL}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle AKH$ $KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{61 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{97}{2}}$.

$S_{AKLC} = \frac{AC + KL}{2} \cdot KH = \frac{11\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{97}{2}} = \frac{11\sqrt{97}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{11\sqrt{97}}{2}$.

15. ОДЗ: $7 - 2^x > 0$, $x < \log_2 7$.

Заметим, что $\sqrt{2} > 1{,}4$, а $\sqrt{3} > 1{,}7$. Тогда $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} > 1$.

Получаем неравенство $5 \geqslant 7 - 2^x,\ 2^x \geqslant 2,\ x \geqslant 1$.

С учётом ОДЗ имеем $x \in [1; \log_2 7)$.

Ответ: $[1; \log_2 7)$.

16. а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается стороны AD в точке F, прямой MN — в точке G, стороны AB — в точке H (см. рис. 156).

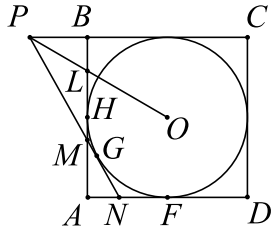


Рис. 156

По свойству касательных, проведённых из одной точки, $NF = NG$ и $MG = MH$. Примем сторону квадрата за a. Тогда $AM + MG = AM + MH = AH = \frac{a}{2}$, $AN+NG = AN+NF = AF = \frac{a}{2}$. $P_{AMN} = AM+MN+AN = AM+MG+NG+AN = $ $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$.

б) Пусть $MG = MH = x$. Тогда $AM = \frac{a}{2} - x,\ AN = \frac{a}{5},\ NF = NG = \frac{a}{2} - \frac{a}{5} = \frac{3a}{10}$, $MN = MG + NG = x + \frac{3a}{10}$.

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, следовательно,
$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \frac{a^2}{25} = \left(x + \frac{3a}{10}\right)^2,\ \frac{a^2}{4} - ax + x^2 + \frac{a^2}{25} = x^2 + \frac{3ax}{5} + \frac{9a^2}{100},\ \frac{8ax}{5} = \frac{a^2}{5},\ x = \frac{a}{8}$.
Таким образом, $AM = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{3a}{8},\ BM = \frac{5a}{8},\ MN = \frac{a}{8} + \frac{3a}{10} = \frac{17a}{40}$.

Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает сторону AB в точке L. Так как окружность вписана в угол NPC, то PL является биссектрисой в треугольнике PBM, следовательно, $\frac{BL}{ML} = \frac{PB}{PM}$.

Треугольники AMN и PMB подобны: $\frac{MN}{PM} = \frac{AN}{PB} = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$. Отсюда $PM = \frac{5}{3}MN = \frac{5}{3} \cdot \frac{17a}{40} = \frac{17a}{24},\ PB = \frac{5}{3}AN = \frac{5}{3} \cdot \frac{a}{5} = \frac{a}{3}$.
Тогда $\frac{BL}{ML} = \frac{PB}{PM} = \frac{8}{17}$ и $BL + ML = BM = \frac{5a}{8}$.

$BL = \frac{8}{17}ML$, $\frac{8}{17}ML + ML = \frac{5a}{8}$, $\frac{25}{17}ML = \frac{5a}{8}$, $ML = \frac{17a}{40}$, $BL = \frac{a}{5}$.

$AL = AB - BL = \frac{4a}{5}$, $AL : BL = 4 : 1$.

Ответ: $4 : 1$.

17. Пусть в каждый из двух банков была положена сумма S. Тогда через год в каждом из двух банков будет сумма $S_1 = S \cdot q$, где $q = 1 + \frac{r}{100}$. Таким образом, начисление $r\%$ годовых соответствует умножению на коэффициент q. Тогда начисление 10% годовых соответствует умножению на коэффициент 1,1. Через 3 года на вкладе в банке «А» будет сумма $S_3(\text{А}) = S \cdot q \cdot 1{,}1^2$, а на вкладе в банке «Б» — сумма $S_3(\text{Б}) = S \cdot q^3$. По условию задачи должно выполняться неравенство $S_3(\text{Б}) \geqslant S_3(\text{А}) \cdot 1{,}2$,
$S \cdot q^3 \geqslant S \cdot q \cdot 1{,}1^2 \cdot 1{,}2$,
$q^2 \geqslant 1{,}21 \cdot 1{,}2$. Так как $100q$ — целое, то $q > 1{,}2$.
$q \geqslant 1{,}21$,
$1 + \frac{r}{100} \geqslant 1{,}21$,
$r \geqslant 21$.

Наименьшим целым r, удовлетворяющим неравенству, будет $r = 21$.

Ответ: 21.

18. Рассмотрим первое уравнение системы. Выражение $AB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ определяет расстояние между точками $A(x; y)$ и $B(3; 0)$. Аналогично выражение $AC = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ определяет расстояние между точками $A(x; y)$ и $C(0; a)$, а выражение $BC = \sqrt{a^2 + 9}$ определяет расстояние между точками $B(3; 0)$ и $C(0; a)$.

По неравенству треугольника $AB + AC \geqslant BC$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда точка A принадлежит отрезку BC. Это значит, что для координат точки $A(x; y)$ справедливы неравенства: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

Тогда из второго уравнения системы имеем:

$0 \leqslant |2 - a^2| \leqslant a$, $|2 - a^2| \leqslant a$, $-a \leqslant 2 - a^2 \leqslant a$, $\begin{cases} 2 - a^2 \geqslant -a, \\ 2 - a^2 \leqslant a, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - a - 2 \leqslant 0, \\ a^2 + a - 2 \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant 2, \\ a \leqslant -2, a \geqslant 1, \end{cases}$ $a \in [1; 2]$.

Итак, первое уравнение системы определяет на плоскости xOy отрезок с концами в точках B и C, не параллельный оси Ox; второе уравнение системы определяет прямую, параллельную оси Ox. При $a \in [1; 2]$ они имеют одну точку пересечения, то есть исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: $[1; 2]$.

19. Пусть всего на доске было записано n чисел, $20 < n < 30$. Пусть среди этих чисел было k положительных, обозначим их a_1, a_2, …, a_k; m отрицательных, обозначим их b_1, b_2, …, b_m и p нулей. Тогда $k + m + p = n$ и по условию задачи

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m+0+0+\ldots+0}{n}=-3,$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}=5,\quad \frac{b_1+b_2+\ldots+b_m}{m}=-10.$$

Из этих равенств следует, что

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m+0+0+\ldots+0=-3n,$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_k=5k,\quad b_1+b_2+\ldots+b_m=-10m.$$

Откуда имеем $5k-10m=-3n$.

а) Заметим, что в равенстве $5k-10m=-3n$ левая часть делится нацело на 5, значит, и правая тоже делится на 5. Из этого следует, что n делится нацело на 5. Так как $20<n<30$, то $n=25$.

б) Подставим в равенство $5k-10m=-3n$ выражение для $n=k+m+p$. Получим: $5k-10m=-3(k+m+p)$, $8k+3p=7m$. Поскольку $p\geqslant 0$, это означает, что $k<m$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим в формулу $5k-10m=-3n$ значение $n=25$. Получим: $5k-10m=-75$, откуда $k=2m-15$. Так как $k+m=25-p\leqslant 25$, имеем $2m-15+m=3m-15\leqslant 25$, $3m\leqslant 40$, $m\leqslant 13$. Тогда $k=2m-15\leqslant 11$, то есть положительных чисел не более 11.

Приведём пример, показывающий, что положительных чисел может быть ровно 11. Пусть на доске 11 раз было написано число 5, 13 раз написано число -10 и один раз написан 0. Тогда

$$\frac{11\cdot 5+13\cdot(-10)}{25}=-\frac{75}{25}=-3.$$

Таким образом, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 25; б) отрицательных; в) 11.

Решение варианта 28

1. Расход электроэнергии за май составляет $12\,521-12\,376=145$ киловатт-часов. По условию 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек, значит, за май нужно заплатить $3{,}5\cdot 145=507{,}5$ руб.

Ответ: 507,5.

2. Через отметку 0,0 соответствующую температуре 0,0 градусов (на вертикальной оси) проведём прямую, совпадающую с осью на которой отмечаются месяцы. Посчитаем месяцы, в которых значения температур были ниже этой прямой, используя диаграмму. Получилось 4 месяца.

Ответ: 4.

3. Обозначим через a длину стороны одной клетки. Тогда, как видим из рисунка, радиус внутреннего круга L равен $2a$, а внешнего G — $3a$. Поэтому площадь внутреннего круга $S_L=\pi(2a)^2=4\pi a^2$. По условию $4\pi a^2=8$. Значит, $\pi a^2=2$. Площадь внешнего круга $S_G=\pi(3a)^2=9\pi a^2=9\cdot 2=18$.

Площадь заштрихованной фигуры равна $S_G-S_L=18-8=10$ (см. рис. 157).

Ответ: 10.

4. Пусть выбор места в микроавтобусе — исход, выбор места в последнем микроавтобусе — благоприятный исход. Общее число исходов равно 60 (общее число мест), бла-

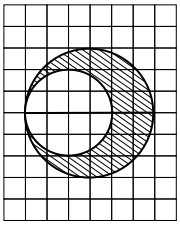


Рис. 157

гоприятных исходов 15 (число мест на последнем рейсе). По определению, вероятность равна $\frac{15}{60} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

5. По определению логарифма $18 + x = 5^{-2},\ 18 + x = 0{,}04,\ x = -18 + 0{,}04,\ x = -17{,}96$.

Ответ: $-17{,}96$.

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне, поэтому меньшая высота проведена к бóльшей стороне. Проведём высоту BH к большей стороне и рассмотрим треугольник ABH (см. рис. 158). $\sin A = \frac{BH}{AB}$. Получаем $BH = AB \sin A = 12 \cdot \frac{5}{8} = 7{,}5$.

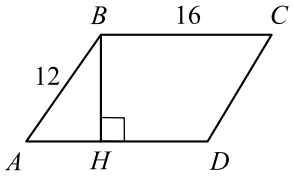


Рис. 158

Ответ: 7,5.

7. Из графика видно, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус (именно в таких точках будет максимум) ровно в одной точке (между -5 и -4) из промежутка $[-6; -2]$. Поэтому на промежутке $[-6; -2]$ ровно одна точка максимума.

Ответ: 1.

8. Согласно условию, KC является высотой пирамиды $KBCD$. CC_1 является высотой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Так как K является серединой CC_1, то $KC = \frac{1}{2}CC_1$. Пусть $CC_1 = H$, тогда $KC = \frac{1}{2}H$. Заметим также, что $S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Тогда, $V_{KBCD} = \frac{1}{3}S_{BCD} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{12} \cdot S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{12}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Следовательно, $V_{KBCD} = \frac{1}{12} \cdot 24 = 2$.

Ответ: 2

9. По формулам приведения и определению котангенса получаем: $5\operatorname{tg}16^\circ \cdot \operatorname{tg}74^\circ = 5\operatorname{tg}16^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 16^\circ) = 5\operatorname{tg}16^\circ \cdot \operatorname{ctg}16^\circ =$

$= 5\operatorname{tg}16^\circ \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}16^\circ} = 5.$

Ответ: 5.

10. Решим неравенство $I \leqslant 485{,}5$ относительно h, учитывая, что $m = 9$, $R = 9$, $M = 1$. $\dfrac{(9 + 2 \cdot 1) \cdot 9^2}{2} + 1 \cdot (2 \cdot 9h + h^2) \leqslant 485{,}5$, $445{,}5 + 18h + h^2 \leqslant 485{,}5$, $h^2 + 18h - 40 \leqslant 0$, откуда $-20 \leqslant h \leqslant 2$. Максимальное значение h равно 2 сантиметрам.

Ответ: 2.

11. Обозначим скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым, через x км/ч. Тогда скорость второго велосипедиста $(x-3)$ км/ч. Время, затраченное на весь путь первым велосипедистом, равно $\dfrac{112}{x}$ ч, вторым велосипедистом — $\dfrac{112}{x-3}$ ч. Разница времени была

40 мин $= \dfrac{2}{3}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{112}{x-3} - \dfrac{112}{x} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{56}{x-3} - \dfrac{56}{x} = \dfrac{1}{3}$,

$56x - 56(x-3) = \dfrac{1}{3}x(x-3)$, $x^2 - 3x - 504 = 0$, $x_1 = 24$, $x_2 = -21$.

Согласно условию $x > 0$, поэтому скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым, равна 24 км/ч.

Ответ: 24.

12. Будем находить точку минимума функции с помощью производной. Найдём производную заданной функции, пользуясь формулами производной произведения, производной x^α и e^x:

$y'(x) = \Big((x+8)^2\Big)' e^{x+52} + (x+8)^2\Big(e^{x+52}\Big)' = 2(x+8)e^{x+52} +$

$+ (x+8)^2 e^{x+52} = (x+8)e^{x+52}(2 + x + 8) = (x+8)(x+10)e^{x+52}$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 159). $e^{x+52} > 0$ при любом x. $y' = 0$ при $x = -8$, $x = -10$.

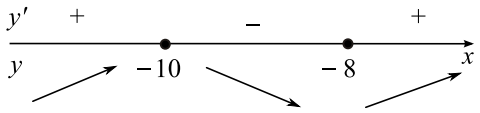


Рис. 159

Из рисунка видно, что функция $y = (x+8)^2 e^{x+52}$ имеет единственную точку минимума $x = -8$.

Ответ: -8.

13. а) ОДЗ: $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 0, \\ x \neq \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

Исходное уравнение на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 4\cos^2 3x - 4\sin 3x - 1 = 0, \\ \operatorname{ctg} x = 0. \end{array}\right.$

Решим первое уравнение. Для этого сделаем замену $\sin 3x = t,\ t \in [-1;1]$. Тогда $\cos^2 3x = 1 - t^2$. Получим

$4(1-t^2) - 4t - 1 = 0,\ 4t^2 + 4t - 3 = 0,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = -\frac{3}{2}$.

t_2 является посторонним корнем.

$\sin 3x = \frac{1}{2},\ 3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ или $3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$. Отсюда $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z;\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in Z$.

Решим второе уравнение.

$\operatorname{ctg} x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

При помощи единичной окружности найдём решения, которые удовлетворяют ОДЗ (см. рис. 160). Знаком «$-$» отмечены 2-я и 4-я четверти, в которых $\operatorname{ctg} x < 0$.

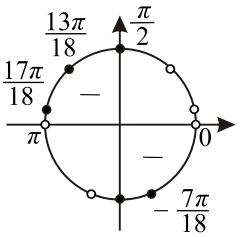


Рис. 160

Получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \frac{13\pi}{18} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{17\pi}{18} + 2\pi m,\ m \in Z;\ -\frac{7\pi}{18} + 2\pi q,\ q \in Z$.

б) Найдём корни, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ (см. рис. 161).

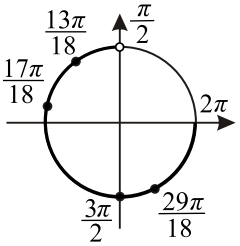


Рис. 161

$x = \frac{13\pi}{18}; x = \frac{17\pi}{18}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{29\pi}{18}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z; \frac{13\pi}{18} + 2\pi n,\ n \in Z; \frac{17\pi}{18} + 2\pi m,\ m \in Z; -\frac{7\pi}{18} + 2\pi q,\ q \in Z$; б) $\frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{3\pi}{2}; \frac{29\pi}{18}$.

14. а) Плоскость сечения пересекает плоскость верхнего основания по прямой, проходящей через точку K и параллельной AC (по свойству параллельности плоскостей). Тогда плоскость AKC пересекает ребро B_1C_1 в точке L так, что $KL \parallel AC$. Следовательно, искомым сечением будет трапеция $AKLC$ (см. рис. 162).

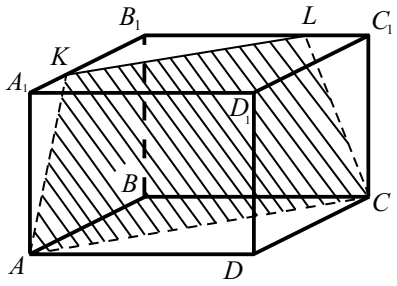


Рис. 162

$KB_1||AB$, $B_1L||BC$, $KL||AC$. Значит, треугольники KB_1L и ABC подобны и являются равнобедренными прямоугольными треугольниками. Тогда $KB_1 = B_1L$ и $A_1K = C_1L$. Треугольники AA_1K и CC_1L равны, следовательно, $AK = CL$ и трапеция $AKLC$ — равнобедренная.

б) Найдём площадь трапеции $AKLC$.

$A_1K = \dfrac{2}{9}A_1B_1 = \dfrac{2}{9} \cdot 9 = 2.$

Из $\triangle AA_1K$: $AK = \sqrt{AA_1^2 + A_1K^2} = \sqrt{14^2 + 2^2} = 10\sqrt{2}.$

$AC = AB\sqrt{2} = 9\sqrt{2};\ KL = \dfrac{7}{9}AC = \dfrac{7}{9} \cdot 9\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$

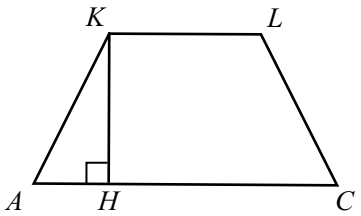


Рис. 163

Так как трапеция $AKLC$ — равнобедренная (см. рис. 163), имеем

$AH = \dfrac{AC - KL}{2} = \sqrt{2}.$

Из $\triangle AKH$: $KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{200 - 2} = \sqrt{198}.$

$S_{AKLC} = \dfrac{AC + KL}{2} \cdot KH = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{198} = 48\sqrt{11}.$

Ответ: б) $48\sqrt{11}$.

15. ОДЗ: $5 - 3^x > 0,\ x < \log_3 5.$

Заметим, что $\sqrt{5} < 2{,}3$, а $\sqrt{2} > 1{,}4$. Тогда $\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$.

Получаем неравенство $4 \geqslant 5 - 3^x,\ 3^x \geqslant 1,\ x \geqslant 0.$

С учётом ОДЗ имеем $x \in [0; \log_3 5)$.

Ответ: $[0; \log_3 5)$.

16. а)

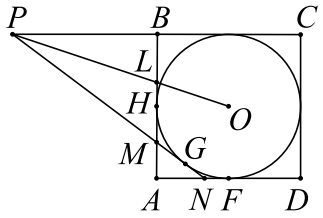


Рис. 164

Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается стороны AD в точке F, прямой MN — в точке G, стороны AB — в точке H (см. рис. 164). По свойству касательных, проведённых из одной точки, $NF = NG$ и $MG = MH$. Примем сторону квадрата за a.

Тогда $AM + MG = AM + MH = AH = \frac{a}{2}$, $AN + NG = AN + NF = AF = \frac{a}{2}$.

$P_{AMN} = AM + MN + AN = AM + MG + NG + AN = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$

б) Пусть $MG = MH = x$. Тогда $AM = \frac{a}{2} - x$, $AN = \frac{a}{3}$, $NF = NG = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$,

$MN = MG + NG = x + \frac{a}{6}$.

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, следовательно

$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \frac{a^2}{9} = \left(x + \frac{a}{6}\right)^2$, $\frac{a^2}{4} - ax + x^2 + \frac{a^2}{9} = x^2 + \frac{ax}{3} + \frac{a^2}{36}$, $\frac{4ax}{3} = \frac{a^2}{3}$, $x = \frac{a}{4}$.

Таким образом, $AM = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$, $BM = \frac{3a}{4}$, $MN = \frac{a}{4} + \frac{a}{6} = \frac{5a}{12}$.

Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает сторону AB в точке L. Так как окружность вписана в угол NPC, то PL является биссектрисой в треугольнике PBM, следовательно, $\frac{BL}{ML} = \frac{PB}{PM}$.

Треугольники AMN и PMB подобны: $\frac{MN}{PM} = \frac{AN}{PB} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. Отсюда

$PM = 3MN = 3 \cdot \frac{5a}{12} = \frac{5a}{4}$, $PB = 3AN = 3 \cdot \frac{a}{3} = a$.

Тогда $\frac{BL}{ML} = \frac{PB}{PM} = \frac{4}{5}$ и $BL + ML = BM = \frac{3a}{4}$.

$BL = \frac{4}{5}ML$, $\frac{4}{5}ML + ML = \frac{3a}{4}$, $\frac{9}{5}ML = \frac{3a}{4}$, $ML = \frac{5a}{12}$, $BL = \frac{a}{3}$. $AL = AB - BL = \frac{2a}{3}$, $BL : AL = 1 : 2$.

Ответ: $1 : 2$.

17. Пусть в каждый из двух банков была положена сумма S. Тогда через год в каждом из двух банков будет сумма $S_1 = S \cdot q$, где $q = 1 + \frac{r}{100}$. Таким обра-

зом, начисление $r\%$ годовых соответствует умножению на коэффициент q. Тогда начисление 8% годовых соответствует умножению на коэффициент 1,08. Через 3 года на вкладе в банке «А» будет сумма $S_3(\text{А}) = S \cdot q \cdot 1{,}08^2$, а на вкладе в банке «Б» — сумма $S_3(\text{Б}) = S \cdot q^3$. По условию задачи должно выполняться неравенство

$$S_3(\text{Б}) \geqslant S_3(\text{А}) \cdot 1{,}16,$$
$$S \cdot q^3 \geqslant S \cdot q \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}16,$$
$$q^2 \geqslant 1{,}1664 \cdot 1{,}16,$$
$$q \geqslant 1{,}17,$$
$$1 + \frac{r}{100} \geqslant 1{,}17,$$
$$r \geqslant 17.$$

Наименьшим целым r, удовлетворяющим неравенству, будет $r = 17$.

Ответ: 17.

18. Рассмотрим первое уравнение системы. Выражение $AB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ означает геометрически расстояние между точками $A(x; y)$ и $B(a; 0)$. Аналогично, выражение $AC = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ определяет расстояние между точками $A(x; y)$ и $C(0; -1)$, а выражение $BC = \sqrt{a^2 + 1}$ определяет расстояние между точками $B(a; 0)$ и $C(0; -1)$.

По неравенству треугольника $AB + AC \geqslant BC$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда точка A принадлежит отрезку BC. Это значит, что для координат точки $A(x; y)$ справедливы неравенства: $0 \leqslant x \leqslant a,\ -1 \leqslant y \leqslant 0$.

Тогда из второго уравнения системы имеем:

$$0 \leqslant \frac{|a^2-4|}{3} \leqslant a,\ |a^2-4| \leqslant 3a,\ -3a \leqslant a^2-4 \leqslant 3a,\ \begin{cases} a^2-4 \geqslant -3a, \\ a^2-4 \leqslant 3a, \end{cases}\quad \begin{cases} a^2+3a-4 \geqslant 0, \\ a^2-3a-4 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leqslant -4, a \geqslant 1, \\ -1 \leqslant a \leqslant 4, \end{cases}\quad a \in [1; 4].$$

Итак, первое уравнение системы определяет на плоскости xOy отрезок с концами в точках B и C, не параллельный оси Oy; второе уравнение системы определяет прямую, параллельную оси Oy. При $a \in [1; 4]$ они имеют одну точку пересечения, то есть исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: $[1; 4]$.

19. Пусть всего на доске было записано n чисел, $27 < n < 45$. Пусть среди этих чисел было k положительных, обозначим их a_1, a_2, …, a_k; m отрицательных, обозначим их b_1, b_2, …, b_m и p нулей. Тогда $k + m + p = n$ и по условию задачи

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + 0 + 0 + \ldots + 0}{n} = 11,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = 18,\quad \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m} = -9.$$

Из этих равенств следует, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + 0 + 0 + \ldots + 0 = 11n,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 18k,\quad b_1 + b_2 + \ldots + b_m = -9m.$$

Откуда имеем $18k - 9m = 11n$.