а) Заметим, что в равенстве $18k - 9m = 11n$ левая часть делится нацело на 9, значит, и правая тоже делится на 9. Из этого следует, что $n$ делится нацело на 9. Так как $27 < n < 45$, то $n = 36$.

б) Подставим в равенство $18k - 9m = 11n$ выражение для $n = k + m + p$. Получим $18k - 9m = 11(k + m + p)$, $7k = 20m + 11p$. Поскольку $p \geqslant 0$, это означает, что $k > m$. Следовательно, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в) Подставим в формулу $18k - 9m = 11n$ значение $n = 36$. Получим $18k - 9m = 11 \cdot 36$, откуда $m = 2k - 44$. Так как $k + m = 36 - p \leqslant 36$, имеем $k + 2k - 44 = 3k - 44 \leqslant 36$, $3k \leqslant 80$, $k \leqslant 26$. Тогда $m = 2k - 44 \leqslant 8$, т.е. отрицательных чисел не более 8.

Приведём пример, показывающий, что отрицательных чисел может быть ровно 8. Пусть на доске 26 раз было написано число 18, 8 раз написано число $-9$ и два раза написан 0. Тогда

$$\frac{26 \cdot 18 + 8 \cdot (-9)}{36} = \frac{396}{36} = 11.$$

Таким образом, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

*Ответ:* а) 36; б) положительных; в) 8.

## Решение варианта 30

**1.** У Кати останется $23 - 1{,}2 \cdot 14 = 6{,}2$ руб.

*Ответ:* 6,2.

**2.** Находим нужный нам период с 22 по 30 августа. Далее, используя диаграмму, в этом периоде определяем самый низкий столбец, он соответствует 27 августа.

*Ответ:* 27.

**3.** Площадь заштрихованного сектора равна половине площади всего круга, т.е. его площадь равна $0{,}5 \cdot 26 = 13$.

*Ответ:* 13.

**4.** Сформируем группы по $16 : 4 = 4$ (человека), последовательно помещая спортсменов на свободные места, при этом начнём с Оли и Маши. Сначала поместим Олю на случайно выбранное место из 16. Теперь помещаем на свободное место Машу (исходом этого эксперимента будем считать выбор места для неё). Всего имеется 15 свободных мест (одно уже заняла Оля), поэтому всего возможны 15 исходов. В одной группе с Олей останется 3 свободных места, поэтому событию «Оля и Маша в одной группе» благоприятствуют 3 исхода. Вероятность этого события равна $\dfrac{3}{15} = 0{,}2$.

*Ответ:* 0,2.

**5.** $\log_7(x^2 - 4x) = \log_7(x^2 + 6)$, $x^2 - 4x = x^2 + 6$, $-4x = 6$, $x = -1{,}5$. Сделаем проверку. $\log_7((-1{,}5)^2 - 4(-1{,}5)) = \log_7((-1{,}5)^2 + 6)$, $\log_7(8{,}25) = \log_7(8{,}25)$). Верно, значит $x = -1{,}5$ — корень уравнения.

*Ответ:* $-1{,}5$.

**6.** Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC = 8$, $AD = 22$ — основания, $AB = CD$ (см. рис. 165).

Проведём высоты $CK$ и $BH$. $BCKH$ — прямоугольник, $BC = KH = 8$. Треугольники $ABH$ и $DCK$ равны по гипотенузе и острому углу, откуда

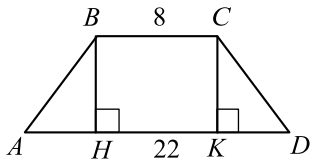


Рис. 165

$AH = KD = (22 - 8) : 2 = 7$. Треугольник $ABH$ прямоугольный, $\cos A = \dfrac{AH}{AB}$.

Боковая сторона трапеции $AB = AH : \cos A = 7 : 0{,}4 = 17{,}5$.

*Ответ:* 17,5.

**7.** Пусть $(x_0; y_0)$ — точка, в которой прямая $y = -2x + 5$ касается графика функции $y = ax^2 + 2x + 7$. Тогда угловой коэффициент касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 7$ в точке $x_0$ равен $y'(x_0)$. Но $y' = 2ax + 2$, значит $y'(x_0) = 2ax_0 + 2$. Угловой коэффициент касательной $y = -2x + 5$, указанной в условии, равен $-2$. Поэтому $2ax_0 + 2 = -2$. Отсюда, $a \neq 0$.

Кроме того, точка $(x_0; y_0)$ лежит на прямой $y = -2x + 5$ и на графике функции $y = ax^2 + 2x + 7$. Значит, выполняется равенство $y_0 = -2x_0 + 5 = ax_0^2 + 2x_0 + 7$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = -2, \\ -2x_0 + 5 = ax_0^2 + 2x_0 + 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a}, \\ ax_0^2 + 4x_0 + 2 = 0. \end{cases}$$

$$a\left(-\frac{2}{a}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{a}\right) + 2 = 0, \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 2 = 0, \frac{4}{a} = 2, a = 2.$$

*Ответ:* 2.

**8.** Указанный в условии многогранник является треугольной пирамидой, в основании которой лежит треугольник $ABB_1$ (см. рис. 166), а высотой является боковое ребро призмы $B_1C_1$, так как $B_1C_1 \perp AA_1B_1B$. $S_{AB_1B} = \dfrac{1}{2}S_{AA_1B_1B} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BB_1 = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AA_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Отсюда,

$V_{ABCB_1} = \dfrac{1}{3}S_{AB_1B} \cdot B_1C_1 = \dfrac{1}{3}S_{AB_1B} \cdot AD = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 10.$

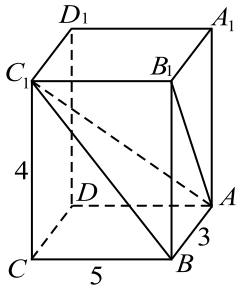


Рис. 166

*Ответ:* 10.

**9.** $(25a^2-36)\cdot\dfrac{5a+6-(5a-6)}{(5a-6)(5a+6)}+a-37=$

$=(25a^2-36)\cdot\dfrac{5a+6-5a+6}{(5a-6)(5a+6)}+a-37=$

$=((5a)^2-6^2)\cdot\dfrac{12}{(5a-6)(5a+6)}+a-37=$

$=\dfrac{12(5a-6)(5a+6)}{(5a-6)(5a+6)}+a-37=12+a-37=a-25=157-25=132.$

*Ответ:* 132.

**10.** Решим неравенство $f(v)-f_0\geqslant 8$, $\dfrac{f_0}{1-\dfrac{v}{c}}-f_0\geqslant 8$, $\dfrac{400}{1-\dfrac{v}{306}}-400\geqslant 8$, $\dfrac{1}{1-\dfrac{v}{306}}-1\geqslant\dfrac{1}{50}$,

$\dfrac{1}{1-\dfrac{v}{306}}\geqslant\dfrac{51}{50}$, $1-\dfrac{v}{306}\leqslant\dfrac{50}{51}$, $\dfrac{v}{306}\geqslant\dfrac{1}{51}$, $v\geqslant 6$. Следовательно, минимальная скорость тепловоза 6 м/с.

*Ответ:* 6.

**11.** Обозначим скорость течения реки через $x$ км/ч. Тогда скорость теплохода по течению реки — $18+x$ км/ч, а скорость теплохода против течения реки $(18-x)$ км/ч. Время движения теплохода равно $41-5=36$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{299}{18+x}+\dfrac{299}{18-x}=36$,

$299(18-x+18+x)=36(18-x)(18+x)$, $299=324-x^2$, $x^2=25$, $x_1=5$, $x_2=-5$.

Скорость течения положительна, она равна 5 км/ч.

*Ответ:* 5.

**12.** Найдём производную исходной функции: $y'=-9+9\sqrt{2}\sin x$. Вычислим нули производной: $y'=0$; $-9+9\sqrt{2}\sin x=0$; $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. На отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ этому уравнению удовлетворяет только $x=\dfrac{\pi}{4}$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции на рассматриваемом отрезке (см. рис. 167). Из рисунка видно, что при $x<\dfrac{\pi}{4}$ выполняется $y'(x)<0$ и исходная функция убывает. Аналогично, при $x>\dfrac{\pi}{4}$ выполняется $y'(x)>0$ и исходная функция возрастает.

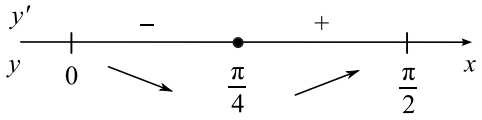


Рис. 167

Значит, наименьшее значение достигается при $x = \frac{\pi}{4}$ и равно $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 24 + \frac{9\pi}{4} - 9 \cdot \frac{\pi}{4} - 9\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 24 - 9 = 15.$

*Ответ:* 15.

**13.** а) Решим уравнение $2\cos x\left(\cos x + \cos\frac{5\pi}{4}\right) + \cos x + \cos\frac{3\pi}{4} = 0.$

Так как $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение примет вид $2\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Отсюда $(2\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$

Тогда $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$, найдём с помощью числовой окружности: $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$ (см. рис. 168).

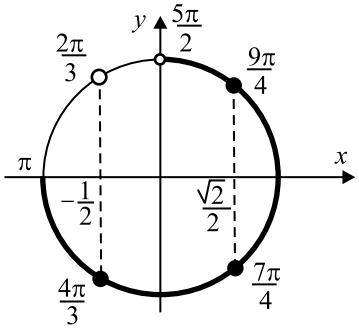


Рис. 168

*Ответ:* а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$.

**14.** а) Так как $AK = AM = 5 - 2 = 3$, то $\triangle AKM$ равнобедренный (см. рис. 169). Так как в этом равнобедренном треугольнике $\angle KAM = 60°$, то он равносторонний, то есть $KM = 3$. Тогда $KM \parallel DC$, так как равны соответственные углы при прямых $KM$, $DC$ и секущей $AD$.

Построим $LN \parallel DC$. Так как в этом случае $LN \parallel KM$, то точки $K$, $L$, $N$ и $M$ лежат в одной плоскости, то есть трапеция $KLNM$ есть искомое сечение.

б) 1. $\triangle BLN \sim \triangle BDC$, так как $LN \parallel DC$. Следовательно, $\triangle BLN$ является равносторонним и $LN = BN = BL = BD - LD = 5 - 4 = 1$.

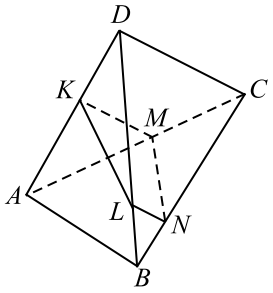


Рис. 169

2. $\triangle DKL = \triangle CMN$, так как $DK = CM = 2$, $DL = CN = 4$ и $\angle KDL = \angle MCN = 60°$. Значит, $KL = MN$ и $KMNL$ — равнобедренная трапеция. Опустим в ней высоту $LH$ (см. рис. 170). Отсюда, $KH = \dfrac{KM - LN}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

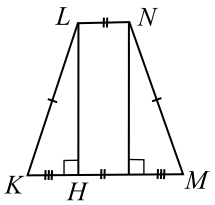


Рис. 170

3. По теореме косинусов для $\triangle KDL$ получим:

$$KL^2 = KD^2 + DL^2 - 2 \cdot KD \cdot DL \cdot \cos 60° = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

4. По теореме Пифагора $LH = \sqrt{KL^2 - KH^2} = \sqrt{12-1} = \sqrt{11}$.

5. $S_{KMNL} = \dfrac{1}{2}(KM + LN) \cdot LH = \dfrac{1}{2}(3+1) \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$.

*Ответ:* $2\sqrt{11}$.

**15.** $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{\log_{3x+2}(x^2 - 5x + 7)} \leqslant 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 3x + 2 \neq 1, \\ x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x^2 - 5x + 7 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\dfrac{2}{3}, \\ x \neq -\dfrac{1}{3}, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\dfrac{2}{3}, \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Применяя метод рационализации, получим, что на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)}{(3x+2-1)(x^2 - 5x + 7 - 1)} \leqslant 0;$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)(x-3)}\leqslant 0;$$

Из рисунка 171 следует $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}\leqslant x<2$.

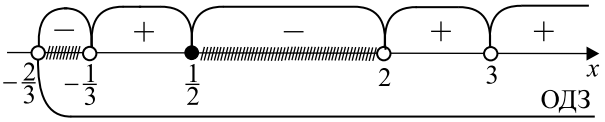


Рис. 171

*Ответ:* $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{2};2\right)$.

**16.** а) 1. $MT=ML$ и $NK=NT$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки (см. рис. 172).

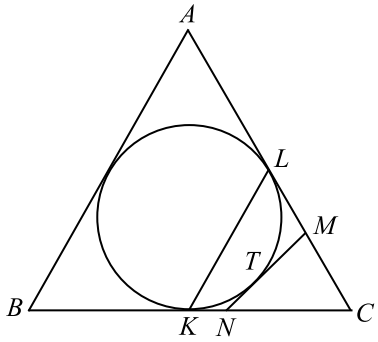


Рис. 172

2. $\triangle ABC$ — правильный, следовательно $K$ и $L$ — середины $BC$ и $AC$, соответственно. Тогда $KL$ — средняя линия $\triangle ABC$, $KL=\frac{1}{2}AB=BK$.

3. $P_{KNML}=KN+NT+MT+ML+LK=2NT+2MT+LK=$
$=2(NT+MT)+BK=2MN+BK$, что и требовалось доказать.

б) 1. Пусть сторона правильного треугольника $ABC$ равна $a$ и $TN=x$. Тогда так как $MT:TN=6:1$ по условию, то $MT=6x$ и $MN=7x$. Значит, $MC=CL-ML=CL-MT=\frac{a}{2}-6x$ и $CN=CK-NK=CK-TN=\frac{a}{2}-x$.

2. По теореме косинусов для треугольника $MNC$
$MN^2=CN^2+CM^2-2\cdot CN\cdot CM\cdot\cos\angle NCM$. Подставляя в это уравнение выражения для сторон треугольника $MNC$, получим:

$$(7x)^2=\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}-6x\right)^2-2\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-6x\right)\cos 60^\circ;$$

$$49x^2=\frac{a^2}{4}-ax+x^2+\frac{a^2}{4}-6ax+36x^2-\frac{a^2}{4}+3ax+\frac{ax}{2}-6x^2;$$

$18x^2 + \frac{7}{2}ax - \frac{a^2}{4} = 0;$

$4 \cdot 18x^2 + 14ax - a^2 = 0.$

$72x^2 + 14ax - a^2 = 0.$

По формуле чётного второго коэффициента $x_{1,2} = \frac{-7a \pm \sqrt{49a^2 + 72a^2}}{72}$,

$x_{1,2} = \frac{-7a \pm 11a}{72}$. Так как $x > 0$, то $x = \frac{a}{18}$.

3. Тогда $CM = \frac{a}{2} - 6x = \frac{a}{2} - \frac{6a}{18} = \frac{a}{6}$, $MA = AC - CM = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$. Таким образом,

$CM : MA = \frac{a}{6} : \frac{5}{6}a = 1 : 5.$

*Ответ:* $1 : 5$.

**17.** Пусть $k = 6$ млн рублей — сумма кредита, $n$ — число лет, на которые планируется взять кредит, $p_i$ млн рублей — сумма платежа в $i$-й год ($i = 1, 2, \ldots, n$), $p_{max} = 1{,}8$ млн рублей — максимальная годовая выплата, $x$ млн. рублей — величина, на которую долг уменьшается ежегодно. Из условия следует таблица:

| **Год** | **Долг на начало года** | **Остаток после ежегодной выплаты** |
|---|---|---|
| 1 | $1{,}2k$ | $1{,}2k - p_1 = k - x$ |
| 2 | $1{,}2(k - x)$ | $1{,}2(k - x) - p_2 = k - 2x$ |
| 3 | $1{,}2(k - 2x)$ | $1{,}2(k - 2x) - p_3 = k - 3x$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $n$ | $1{,}2(k - (n-1)x)$ | $1{,}2(k - (n-1)x) - p_n = k - nx = 0$ |

Из последнего столбца таблицы следует:

$p_1 = 1{,}2k - k + x = 0{,}2k + x;$

$p_2 = 1{,}2k - 1{,}2x - k + 2x = 0{,}2k + 0{,}8x;$

$p_3 = 1{,}2k - 1{,}2 \cdot 2x - k + 3x = 0{,}2k + 0{,}6x;$

$\ldots$

$p_n = 1{,}2k - 1{,}2(n-1)x - k + nx = 0{,}2k + (1{,}2 - 0{,}2n)x.$

Видно, что $p_{max} = p_1$, то есть $0{,}2k + x = p_{max}$; $0{,}2 \cdot 6 + x = 1{,}8$; $x = 0{,}6$ млн. рублей.

Так как $k - nx = 0$, то $n = \frac{k}{x} = \frac{6}{0{,}6} = 10.$

*Ответ:* 10.

**18.** Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x - a}$, определённую при $x \geqslant a$. Тогда полученное уравнение можно записать в виде $f(f(x)) = x$, так как $f(f(x)) = \sqrt{f(x) - a} = \sqrt{\sqrt{x - a} - a}$. Это уравнение равносильно уравнению $f(x) = f^{-1}(x)$, где $f^{-1}(x)$ — функция, обратная к $f(x)$. Если $y = \sqrt{x - a}$, то $x = y^2 + a$. Тогда обратной к функции $f(x)$ является функция $f^{-1}(x) = x^2 + a$, определённая при $x \geqslant 0$, проверим это:

$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x) - a} = \sqrt{x^2 + a - a} = \sqrt{x^2} = |x| = x;$

$f^{-1}(f(x)) = f^2(x) + a = (\sqrt{x - a})^2 + a = |x - a| + a = x - a + a = x.$

Возможны три случая.

1. При $a < 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ имеет единственный корень $x_0$ (см. рис. 173).

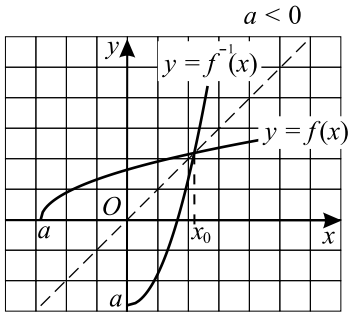


Рис. 173

2. При $a = 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ принимает вид $\sqrt{x} = x^2$ и имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (см. рис. 174).

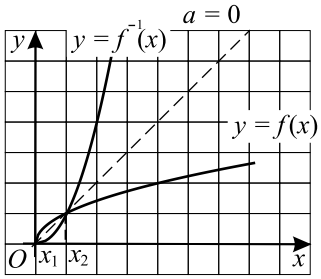


Рис. 174

3. При $a > 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ будет иметь единственный корень $x_0$ только если прямая $y = x$ будет общей касательной к графикам функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ (см. рис. 175).

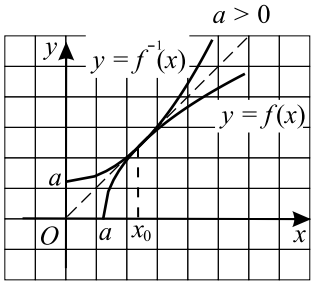


Рис. 175

В этом случае в точке $x_0$ выполняются условия:

$$\begin{cases} f(x_0) = f^{-1}(x_0), \\ \left(f^{-1}(x_0)\right)' = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x_0 - a} = x_0^2 + a, \\ 2x_0 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x_0 = \dfrac{1}{2}$ и подставляем это значение в первое уравнение:

$$\sqrt{\frac{1}{2} - a} = \frac{1}{4} + a;$$

$\frac{1}{2} - a = \frac{1}{16} + \frac{a}{2} + a^2$;

$a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{7}{16} = 0$;

$16a^2 + 24a - 7 = 0$.

Последнее уравнение имеет два корня $a_1 = -\frac{7}{4}$ и $a_2 = \frac{1}{4}$. Так как $a > 0$, то $a = \frac{1}{4}$.

*Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

**19.** а) Построим пример 800-элементной последовательности, для которой среднее арифметическое больше НОД ровно в 500 раз. Пусть $x$ — последнее число в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 799, x$. Тогда, так как НОД этих чисел равен 1, то должно выполняться условие $\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 799 + x}{800} = 500$. Отсюда, $\frac{(799 + 1) \cdot 799}{2} + x = 800 \cdot 500$; $x = 800 \cdot 500 - 400 \cdot 799 = 400(2 \cdot 500 - 799) = 400 \cdot 201 = 80\,400$. Таким образом, искомая последовательность имеет вид $1, 2, 3, \ldots, 798, 799, 80\,400$.

б) Пусть НОД восьмисот чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{800}$ равен $d$. Тогда $a_1 \geqslant d, a_2 \geqslant 2d, \ldots, a_{800} \geqslant 800d$. Следовательно, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{800} \geqslant d(1 + 2 + 3 + \ldots + 800) = 400 \cdot 801d$, а среднее арифметическое $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{800}}{800} \geqslant \frac{801}{2}d = 400{,}5d$. Значит, среднее арифметическое не может быть больше НОД ровно в 400 раз.

в) В предыдущем пункте для среднего арифметического последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{800}$ была получена оценка $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{800}}{800} \geqslant 400{,}5d$. Значит, наименьшее натуральное число равное отношению среднего арифметического этих чисел к их НОД, не меньше чем 401. Покажем, что оно может равняться 401. Пусть $d = 1$. Примером такой последовательности является 800-элементная последовательность $1, 2, 3, \ldots, 799, 1200$. Её наибольший общий делитель равен 1, а среднее арифметическое $\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 799 + 1200}{800} = \frac{400 \cdot 799 + 1200}{800} = \frac{400(799 + 3)}{800} =$

$= \frac{802}{2} = 401$.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 401.

## Решение варианта 31

**1.** За 2 ананаса заплатили 56 батов.

| | | |
|---|---|---|
| 1 бат | — | 2,2 руб. |
| 56 бат | — | $x$ руб., |

отсюда $x = 2{,}2 \cdot 56 = 123{,}2 \approx 123$ рубля.

*Ответ:* 123.

**2.** Находим на горизонтали 14 июля, этому числу по рисунку соответствует по вертикали число 21. То есть температура воздуха 14 июля была 21 °C.

*Ответ:* 21.

**3.** Заметим, что $\triangle OCA$ — прямоугольный и равнобедренный, значит, угол $AOC$ равен 45°. Угол $BOC$ равен 90°, тогда угол $AOB$ равен 135°. Площадь сектора составляет $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ площади всего круга (см. рис. 176). Площадь круга равна $15 \cdot \frac{8}{3} = 40$.

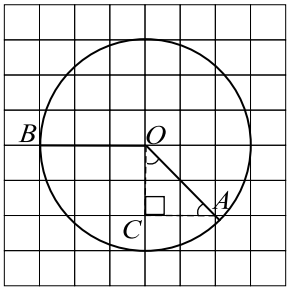


Рис. 176

*Ответ:* 40.

**4.** Расставим на перекрёстках стрелки в направлениях, по которым может двигаться мышка (см. рис. 177). Выберем на каждом из перекрёстков одно направление из двух возможных и будем считать, что при попадании на перекрёсток мышка будет двигаться по выбранному нами направлению.

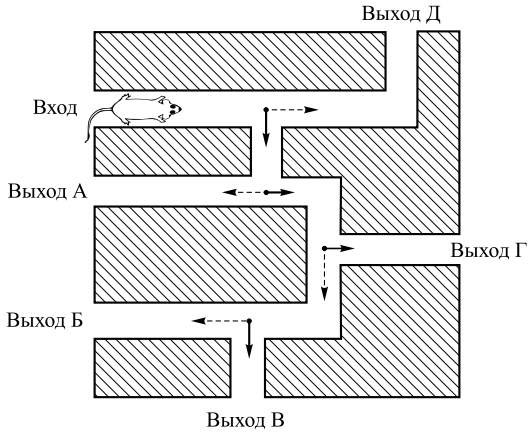


Рис. 177

Чтобы мышка достигла выхода Г, нужно, чтобы на каждом перекрёстке было выбрано направление, обозначенное сплошной линией. Всего выбор направления делается 3 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбрана сплошная стрелка, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5^3 = 0{,}125$.

*Ответ:* 0,125.

**5.** $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}=1,\ \dfrac{\pi x}{8}=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.\ \dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{4}+k,\ x=2+8k$, наибольший отрицательный корень уравнения при $k=-1$, $x=2-8=-6$.

*Ответ:* $-6$.

**6.** Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC$ и $AD$ — основания, $AD=24$, $AB=CD=7$ (см. рис. 178). Проведём высоты $CK$ и $BH$. $BCKH$ — прямоугольник, $BC=KH$. Треугольник $ABH$ прямоугольный, $\cos A=\dfrac{AH}{AB}$. Вычислим $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{33}}{7}\right)^2}=\dfrac{4}{7}$. $AH=AB\cos A=7\cdot\dfrac{4}{7}=4$. Треугольники $ABH$ и $DCK$ равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH=KD=4$, $BC=24-4-4=16$.

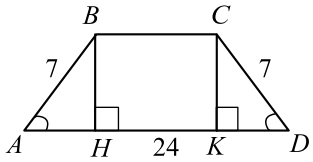


Рис. 178

*Ответ:* 16.

**7.** Как известно, функция $f(x)$ возрастает на тех промежутках, в каждой точке которых производная $f'(x)$ больше нуля. Учитывая, что надо находить длину наибольшего из них естественно по рисунку выделяются три таких промежутка: $(-9;-8)$; $(-5;-1)$; $(1;4)$.

Длина наибольшего из них — $(-5;-1)$, равна 4.

*Ответ:* 4.

**8.** Заметим, что многогранник, указанный в условии получается отсечением треугольной пирамиды $BB_1C_1A_1$ от призмы $ABCA_1B_1C_1$. Поэтому $V_{ABCA_1C_1}=V_{ABCA_1B_1C_1}-V_{BB_1C_1A_1}$. $V_{ABCA_1B_1C_1}=S_{ABC}\cdot CC_1=5\cdot 6=30$. В основании треугольной пирамиды $BB_1C_1A_1$ лежит треугольник $B_1A_1C_1$, а высотой является боковое ребро призмы $BB_1$, так как $BB_1\perp A_1B_1C_1$. Отсюда, $V_{BB_1C_1A_1}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\text{осн.}}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 5\cdot 6=10$. $V_{ABCA_1C_1}=V_{ABCA_1B_1C_1}-V_{BB_1C_1A_1}=30-10=20$ (см. рис. 179).

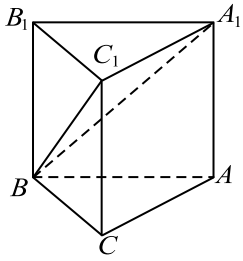


Рис. 179

*Ответ:* 20.

**9.** $5\log_{1,6}3\cdot\log_3 0{,}625=\dfrac{5}{\log_3 1{,}6}\cdot\log_3 0{,}625=\dfrac{5}{\log_3\frac{8}{5}}\cdot\log_3\dfrac{5}{8}==\dfrac{5\log_3\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}}{\log_3\frac{8}{5}}=-5.$

*Ответ:* $-5$.

**10.** $E=\dfrac{m\left(v_0\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2}{2}$, $E=\dfrac{0{,}4\left(0{,}3\cos\frac{2\pi\cdot 3}{2}\right)^2}{2}=0{,}2\cdot 0{,}09=0{,}018$. Кинетическая энергия груза через 3 секунды после начала колебаний равна 0,018 Дж.

*Ответ:* 0,018.

**11.** Обозначим скорость течения реки через $x$ км/ч. Тогда скорость лодки по течению реки $(15+x)$ км/ч, скорость лодки против течения реки $(15-x)$ км/ч. Время, затраченное лодкой на путь по течению реки $\dfrac{160}{15+x}$ ч, время, затраченное на путь против течения реки — $\dfrac{160}{15-x}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{160}{15-x}-\dfrac{160}{15+x}=8$,

$\dfrac{20}{15-x}-\dfrac{20}{15+x}=1$,

$20(15+x-15+x)=(15-x)(15+x)$, $20\cdot 2x=225-x^2$, $40x=225-x^2$, $x^2+40x-225=0$, $x_1=5$, $x_2=-45$.

Скорость течения положительна, она равна 5 км/ч.

*Ответ:* 5.

**12.** Найдём производную исходной функции:

$y'=32(\operatorname{tg}x)'-(32x)'-(8\pi)'+(103)'=\dfrac{32}{\cos^2 x}-32=\dfrac{32-32\cos^2 x}{\cos^2 x}\geqslant 0$. Значит, исходная функция является неубывающей на рассматриваемом промежутке и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то есть при $x=-\dfrac{\pi}{4}$. Наименьшее значение равно $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=32\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-32\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)-8\pi+103=-32+103=71$.

*Ответ:* 71.

**13.** а) Раскрыв скобки и перенеся все слагаемые в левую часть, получим уравнение $2\sin x+2\cos x-\operatorname{ctg}x-1=0$. Так как $\sin x\neq 0$, то слагаемое $2\cos x$ можно заменить на $2\operatorname{ctg}x\sin x$, получим уравнение $2\sin x+2\operatorname{ctg}x\sin x-\operatorname{ctg}x-1=0$, которое способом группировки можно привести к виду $(1+\operatorname{ctg}x)(1-2\sin x)=0$.

1) $1+\operatorname{ctg}x=0$, $\operatorname{tg}x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$;

2) $1-2\sin x=0$, $\sin x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

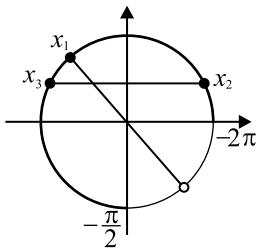


Рис. 180

$x_1 = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.

*Ответ:* а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. б) $-\frac{11\pi}{6}$,$-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

**14.** а) Плоскость $AMN$ пересекает ребро $DD_1$ в точке $K$, являющейся четвёртой вершиной сечения данной призмы этой плоскостью. Сечением является параллелограмм $ANMK$, потому что противоположные грани данной призмы параллельны (см. рис. 181). $BN = \frac{1}{3}BB_1 = 2$. Проведём $KL \parallel CD$, тогда треугольники $ABN$ и $KLM$ равны, значит $ML = BN = 2$, $LC = MC - ML = 3 - 2 = 1$, $KD = LC = 1$. Тогда $KD_1 = 6 - 1 = 5$. Теперь можно найти отношение $KD : KD_1 = 1 : 5$.

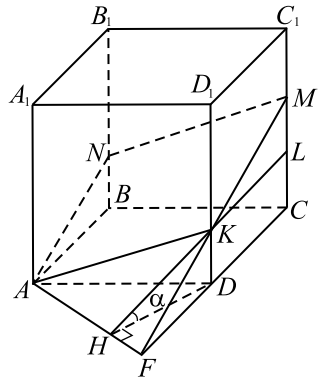


Рис. 181

б) $F$ — точка пересечения прямых $CD$ и $KM$. Плоскости $ABC$ и $AMN$ пересекаются по прямой $AF$. Угол $\angle KHD = \alpha$ — линейный угол этого двугранного угла ($HD \perp AF$, тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $KH \perp AF$), и является острым углом прямоугольного треугольника $KHD$, катет $KD = 1$.

Треугольники $FKD$ и $FMC$ подобны ($KD \parallel MC$), поэтому $FD : FC = KD : MC$, решая пропорцию $FD : (FD + 4) = 1 : 3$, получим $FD = 2$. В прямоугольном треуголь-

нике $AFD$ ($\angle D = 90°$) с катетами 2 и 4 вычислим гипотенузу $AF = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$, $DH = AD \cdot \mathrm{FD} : AF = \dfrac{4\cdot 2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

В прямоугольном треугольнике $KHD$ найдём $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{KD}{DH} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$, значит, искомый угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

*Ответ:* а) $1:5$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

**15.** Заметим, что $x > 0$, $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_2 2x} \geqslant 2,$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_2 2 + \log_2 x} \geqslant 2,$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} \geqslant 2.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда получим неравенство, которое удобно решить методом интервалов (см. рис. 182):

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{1+t} \geqslant 2,$$

$$\frac{(1+t) + 2t - 2t(1+t)}{t(1+t)} \geqslant 0,$$

$$\frac{2t^2 - t - 1}{t(1+t)} \leqslant 0,$$

$$\frac{(2t+1)(t-1)}{t(t+1)} \leqslant 0.$$

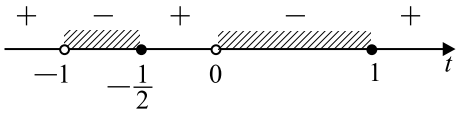


Рис. 182

Получим два двойных неравенства, решим их, возвращаясь к переменной $x$:

$$-1 < t \leqslant -\frac{1}{2}, \qquad 0 < t \leqslant 1,$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x \leqslant \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \log_2 1 < \log_2 x \leqslant \log_2 2,$$

$$\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 1 < x \leqslant 2.$$

Так как найденные значения переменной удовлетворяют ОДЗ, то решение неравенства — $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup(1;2]$.

*Ответ:* $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup(1;\ 2]$.

**16.** а) $AK$ — биссектриса угла $\angle BAD$, значит, $\angle BAK = \angle KAH$. Основания $AD$ и $BC$ трапеции параллельны, значит, $\angle KAH = \angle AKB$ (как накрест лежащие). Поэтому $\angle BAK = \angle AKB$, и треугольник $ABK$ равнобедренный.

б) Пусть $CF = x$, $FD = y$, радиус окружности $r$, тогда, учитывая, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны и треугольник $ABK$ равнобедренный, $BC = 2x + y$.

С другой стороны, учитывая, что точка $M$ — середина основания $BC$, получим $BC = 2x + 2r$, поэтому $y = 2r = 4$ (см. рис. 183).

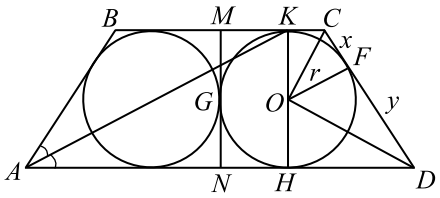


Рис. 183

$\angle COD = 90^\circ$ как угол, образованный двумя биссектрисами смежных углов. Из $\triangle COD$ $OF^2 = CF\cdot FD$, $r^2 = xy$, но $y = 2r$. Тогда $r = 2x$, $x = 1$.

Найдём основания трапеции $BC = 2(x + r) = 2\cdot(1 + 2) = 6$, $AD = 2(y + r) = 2\cdot(4 + 2) = 12$. $KH = 2r = 4$.

Теперь найдём площадь трапеции $ABCD$, воспользовавшись формулой площади

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot KH = \frac{1}{2}\cdot(6 + 12)\cdot 4 = 36.$$

*Ответ:* 36.

**17.** Сумма денег, полученная брокером ежедневно, можно рассматривать как функцию $S(n)$ от номера $n$ дня. Это функция задаётся формулой $S(n) = n(1000 - n)$ или $S(n) = -n^2 + 1000n$, она квадратичная, принимает наибольшее значение при $n = -\frac{1000}{2\cdot(-1)} = 500$. Значит, в 500-ый день выручка брокера была наибольшей и равна она $S(500) = 500\cdot(1000 - 500) = 500\cdot 500 = 250\,000$ рублей.

*Ответ:* 500-ый день, 250 000 рублей.

**18.** Убедитесь, что уравнение $|x| + |y| = a$ в координатной плоскости задаёт квадрат с центром в начале координат, диагональ которого равна $2a$. Для этого рассмотрите четыре различных случая:

1) $x \geqslant 0, y \geqslant 0$;
2) $x < 0, y \geqslant 0$;
3) $x < 0, y < 0$;
4) $x \geqslant 0, y < 0$,

то есть по четвертям.

Построим график первого уравнения. Заметим, что при $x \geqslant 0$, получим уравнение квадрата с центром в точке $(5;\ 4)$, диагональ которого равна 6, при $x < 0$, получим уравнение квадрата с центром в точке $(-5;\ 4)$, диагональ которого равна 6. Таким образом, первое уравнение системы задаёт два квадрата, симметричных относительно оси $Oy$. Они Заштрихованы более плотно (см. рис. 184).

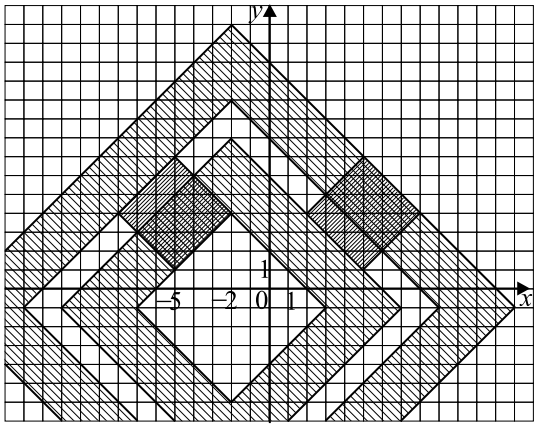


Рис. 184

Второе уравнение $|x+2|+|y+1| = a$ системы определяет квадрат с центром $(-2;\ -1)$ с переменной диагональю $2a$.

В координатной плоскости изображены четыре квадрата при $a = 5;\ 9;\ 11;$ и $15$. Заметим, что если квадрат $|x + 2| + |y + 1| = a$ попадает в светло-серую область, то он пересекает в двух точках один из серых квадратов. Это произойдёт при $5 < a < 9$ или $11 < a < 15$.

*Ответ:* $5 < a < 9$ или $11 < a < 15$.

**19.** а) Можно. Данная последовательность убывающая, поэтому будем искать убывающую прогрессию. Заметим, что последовательность $\frac{5}{n};\ \frac{4}{n};\ \frac{3}{n};\ \frac{2}{n};\ \frac{1}{n}$ является убывающей арифметической прогрессией, её разностью является число $-\frac{1}{n}$. Остаётся подобрать знаменатель $n$ таким, чтобы сократились числители. Понятно, что в качестве знаменателя $n$ можно взять кратное всех числителей, например, число 60. Тогда получим арифметическую прогрессию $\frac{1}{12};\ \frac{1}{15};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{30};\ \frac{1}{60}$, удовлетворяющую условию задачи.

б) Можно. Последовательность $\frac{50}{n};\ \frac{49}{n};\ \ldots;\ \frac{3}{n};\ \frac{2}{n};\ \frac{1}{n}$ является убывающей арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{n}$. Если в качестве знаменателя $n$ взять число $50! = 50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, то после сокращения дробей получим 50 различных дробей, все числители которых равны 1, то есть получим искомую арифметическую прогрессию.

в) Нельзя. В самом деле, любая арифметическая прогрессия является линейной функцией на множестве натуральных чисел. В данном случае убывающей, значит, прямая на которой лежат точки, соответствующие членам этой прогрессии будет пересекать ось

$Ox$. Поэтому начиная с некоторого номера все члены арифметической прогрессии станут отрицательными, а в данной последовательности нет отрицательных членов. Значит, в данной бесконечно убывающей последовательности нельзя выбрать бесконечное множество чисел, которые образуют арифметическую прогрессию.

*Ответ:* а) да; б) да; в) нет.

## Решение варианта 32

**1.** За 3 порции папайи заплатили 66 батов.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ бат} & — & 2{,}2 \text{ руб.} \\ 66 \text{ бат} & — & x \text{ руб.,} \end{array}$$

отсюда $x = 2{,}2 \cdot 66 = 145{,}2 \approx 145$ рублей.

*Ответ:* 145.

**2.** Находим на горизонтали 21 июля, этому числу по рисунку соответствует по вертикали число 26. То есть температура воздуха 21 июля была 26 °C.

*Ответ:* 26.

**3.** Заметим, что $\triangle OCA$ — прямоугольный и равнобедренный, значит, угол $AOC$ равен 45°. Угол $BOC$ равен 180°, тогда угол $AOB$ равен 225°. Площадь сектора составляет $\frac{5}{8}$ площади всего круга (см. рис. 185). Площадь круга равна $15 \cdot \frac{8}{5} = 24$.

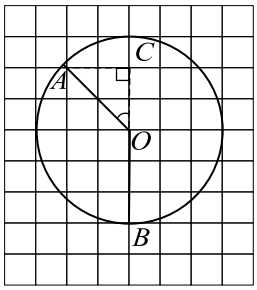


Рис. 185

*Ответ:* 24.

**4.** Расставим на перекрёстках стрелки в направлениях, по которым может двигаться жук (см. рис. 186). Выберем на каждом из перекрёстков одно направление из двух возможных и будем считать, что при попадании на перекрёсток жук будет двигаться по выбранному нами направлению.

Чтобы жук достиг выхода Д, нужно, чтобы на каждом перекрёстке было выбрано направление, обозначенное сплошной линией. Всего выбор направления делается 4 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбрана сплошная стрелка, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5^4 = 0{,}0625$.

*Ответ:* 0,0625.

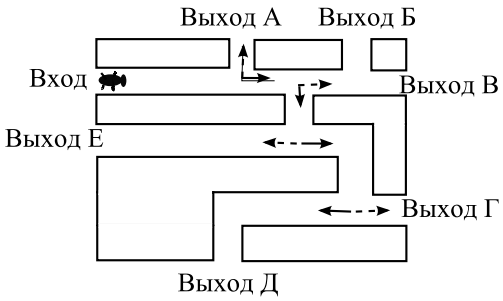


Рис. 186

**5.** $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3} = -\sqrt{3},\ \dfrac{\pi x}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.\ \dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{3} + k,\ x = -1 + 3k$, наименьший положительный корень уравнения при $k = 1$, $x = -1 + 3 = 2$.

*Ответ:* 2.

**6.** Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC$ и $AD$ — основания, $AD = 30$, $AB = CD = 9$ (см. рис. 187). Проведём высоты $CK$ и $BH$. $BCKH$ — прямоугольник, $BC = KH$.

Треугольник $ABH$ прямоугольный, $\cos A = \dfrac{AH}{AB}$. Вычислим $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$. $AH = AB\cos A = 9 \cdot \dfrac{1}{3} = 3$. Треугольники $ABH$ и $DCK$ равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH = KD = 3$, и $BC = 30 - 3 - 3 = 24$.

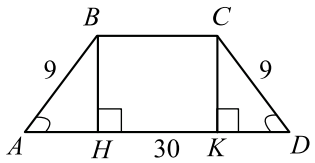


Рис. 187

*Ответ:* 24.

**7.** Как известно, функция $f(x)$ убывает на тех промежутках, в каждой точке которых производная $f'(x)$ меньше нуля. Учитывая, что надо находить длину наибольшего из них естественно по рисунку выделяются три таких промежутка: $(-4; -2)$; $(0; 3)$; $(5; 9)$.

Длина наибольшего из них — $(5; 9)$ равна 4.

*Ответ:* 4.

**8.** Заметим, что многогранник, указанный в условии получается отсечением треугольной пирамиды $A_1ABC$ от призмы $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. 188). Поэтому $V_{A_1B_1BCC_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{A_1ABC}$. $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot CC_1 = 7 \cdot 6 = 42$. В основании треугольной пирамиды $A_1ABC$ лежит треугольник $ABC$,
а высотой является боковое ребро призмы $AA_1$, так как $AA_1 \perp ABC$. Отсюда, $V_{A_1ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 7 \cdot 6 = 14$. $V_{A_1B_1BCC_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{A_1ABC} = 42 - 14 = 28$.

*Ответ:* 28.

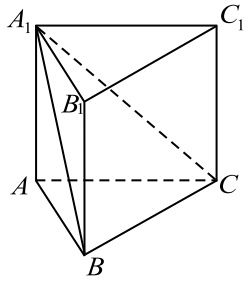


Рис. 188

**9.** $3\log_{0,4}5\cdot\log_5 2{,}5 = 3\log_{\frac{2}{5}}5\cdot\log_5\frac{5}{2} = -3\log_{\frac{5}{2}}5\cdot\log_5\frac{5}{2} =$

$$= \frac{-3}{\log_5\frac{5}{2}}\cdot\log_5\frac{5}{2} = -3.$$

*Ответ:* $-3$.

**10.** $E = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\left(v_0\cos\dfrac{2\pi t}{T}\right)^2}{2} = \dfrac{0{,}06\left(0{,}2\cos\dfrac{2\pi\cdot 2}{2}\right)^2}{2} =$

$= 0{,}03\cdot 0{,}04 = 0{,}0012$. Кинетическая энергия груза через 2 секунды после начала колебаний равна 0,0012 Дж.

*Ответ:* 0,0012.

**11.** Обозначим скорость течения реки через $x$ км/ч. Тогда скорость лодки по течению реки $(18+x)$ км/ч, скорость лодки против течения реки $(18-x)$ км/ч. Время, затраченное лодкой на путь по течению реки $\dfrac{105}{18+x}$ ч, время, затраченное на путь против течения реки $\dfrac{105}{18-x}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{105}{18-x} - \dfrac{105}{18+x} = 2$,

$105(18+x-18+x) = 2(18-x)(18+x)$, $105\cdot 2x = 2(324-x^2)$,
$105x = 324 - x^2$, $x^2 + 105x - 324 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -108$.

Скорость течения положительна, она равна 3 км/ч.

*Ответ:* 3

**12.** Найдём производную исходной функции:

$y' = (12x)' - 12(\operatorname{tg}x)' - (18)' = 12 - \dfrac{12}{\cos^2 x} = \dfrac{12\cos^2 x - 12}{\cos^2 x} \leqslant 0$. Значит, исходная функция является невозрастающей на рассматриваемом промежутке и принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, то есть при $x = 0$. Наибольшее значение равно $y(0) = 12\cdot 0 - 12\operatorname{tg}(0) - 18 = -18$.

*Ответ:* $-18$.

**13.** а) Раскрыв скобки и перенеся все слагаемые в левую часть, получим уравнение

$1+2\sin x-2\cos x-\operatorname{tg} x=0$. Учитывая, что $\cos x\neq 0$, слагаемое $2\sin x$ можно заменить на $2\operatorname{tg} x\cos x$, получим уравнение $1+2\operatorname{tg} x\cos x-2\cos x-\operatorname{tg} x=0$, которое способом группировки можно привести к виду $(1-\operatorname{tg} x)(1-2\cos x)=0$.

1) $1-\operatorname{tg} x=0$, $\operatorname{tg} x=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$;

2) $1-2\cos x=0$, $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$ (см. рис. 189).

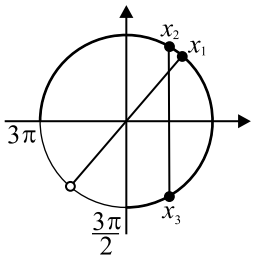


Рис. 189

$x_1=\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{9\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7\pi}{3}$, $x_3=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{5\pi}{3}$.

*Ответ:* а) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{9\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{3}$.

**14.** а) Плоскость $AMN$ пересекает ребро $DD_1$ в точке $K$, являющейся четвёртой вершиной сечения данной призмы этой плоскостью. Сечением является параллелограмм $ANMK$, потому что противоположные грани призмы параллельны (см. рис. 190). $BN=\dfrac{2}{5}BB_1=4$. Проведём $KL\parallel CD$, тогда треугольники $ABN$ и $KLM$ равны, значит $ML=BN=4$. $LC=MC-ML=5-4=1$, $KD=LC=1$. Тогда $KD_1=10-1=9$. Теперь можно найти отношение $KD:KD_1=1:9$.

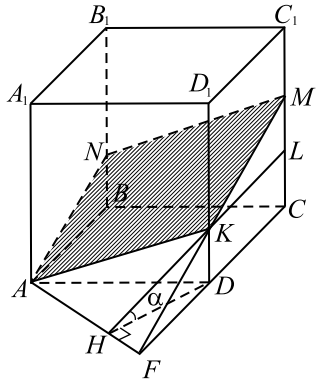


Рис. 190

б) Секущая плоскость пересекает плоскость $ABC$ по прямой $AF$, где $F$ — точка пересечения прямых $CD$ и $KM$. Угол $\angle KHD = \alpha$ — линейный угол этого двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания ($HD \perp AF$, $KH \perp AF$ как наклонная к плоскости основания по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах).

Найдём тангенс этого угла в прямоугольном треугольнике $KHD$, катет $KD = 1$.

Треугольники $FKD$ и $FMC$ подобны, поэтому $FD : FC = KD : MC$, решая пропорцию $FD : (FD + 8) = 1 : 5$, получим $FD = 2$. В прямоугольном треугольнике $AFD$ с катетами 2 и 8 вычислим гипотенузу $AF = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$, $DH = AD \cdot FD : AF = \dfrac{8 \cdot 2}{2\sqrt{17}} = \dfrac{8}{\sqrt{17}}$.

В прямоугольном треугольнике $KHD$ найдём $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{KD}{DH} = \dfrac{\sqrt{17}}{8}$, значит, $\cos\alpha = \dfrac{8}{9}$.

Для вычисления площади сечения воспользуемся формулой, связывающей площадь сечения и площадь его проекции: «площадь прямоугольной проекции многоугольника на плоскость равна площади проецируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции». Учитывая, что площадь основания $ABCD$ равна $8^2 = 64$, получим,

$$S_{ANMK} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha} = \frac{64 \cdot 9}{8} = 72.$$

*Ответ:* а) $1 : 9$; б) 72.

**15.** Заметим, что $x > 0$, $x \neq \dfrac{1}{3}$, $x \neq 1$.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство к виду, удобному использовать подстановку:

$$\frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 3x} \leqslant 2,$$

$$\frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 x} \leqslant 2,$$

$$\frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{1 + \log_3 x} \leqslant 2.$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда получим неравенство, которое удобно решить методом интервалов:

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{1+t} \leqslant 2,$$

$$\frac{2(1+t) + 3t - 2t(1+t)}{t(1+t)} \leqslant 0,$$

$$\frac{2t^2 - 3t - 2}{t(1+t)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(2t+1)(t-2)}{t(t+1)} \geqslant 0.$$

Получим два простых неравенства и одно двойное, решим их, возвращаясь к переменной $x$ (см. рис. 191):

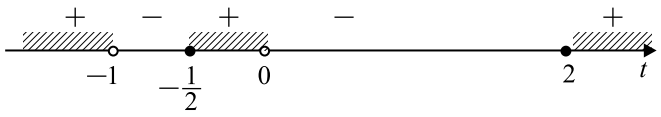


Рис. 191

$$t < -1, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant t < 0, \qquad t \geqslant 2,$$

$$\log_3 x < \log_3 \frac{1}{3}, \quad \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \log_3 x < \log_3 1, \quad \log_3 x \geqslant \log_3 9,$$

$$0 < x < \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x < 1, \qquad x \geqslant 9.$$

Так как найденные значения удовлетворяют ОДЗ, то решение неравенства $\left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ 1\right) \cup [9;\ +\infty)$.

*Ответ:* $\left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ 1\right) \cup [9;\ +\infty)$.

**16.** а) По условию $\angle BAK = \angle KAD$, $\angle KAD = \angle AKB$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей $AK$. Следовательно, $\angle BAK = \angle AKB$ и $\triangle ABK$ равнобедренный (см. рис. 192).

б) Пусть $CF = x$, $FD = y$, радиус окружности $r$, тогда, учитывая, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны и треугольник $ABK$ равнобедренный, найдём $AD = 2x + y$, поэтому площадь параллелограмма равна $S = 2r(2x + y) = 6(2x + y)$.

С другой стороны, площадь параллелограмма равна удвоенной площади прямоугольной трапеции $CDNM$, так как $G$ — точка пересечения диагоналей, поэтому

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot P_{CDNM} \cdot r = (4r + 2x + 2y) \cdot r = 2r(2r + x + y) = 6(6 + x + y).$$

Приравнивая площади, получим уравнение $2x + y = 6 + x + y$, откуда $x = 6$.

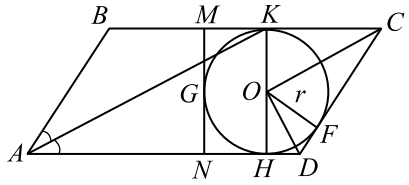


Рис. 192

$\angle COD = 90°$ как угол, образованный двумя биссектрисами смежных углов. Из $\triangle COD$ $OF^2 = CF \cdot FD$, $r^2 = x \cdot y$, отсюда $y = \frac{r^2}{x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Теперь найдём площадь параллелограмма $ABCD$, воспользовавшись одной из формул

$$S = 6(2x + y) = 6\left(2 \cdot 6 + \frac{3}{2}\right) = 81.$$

*Ответ:* 81.

**17.** Сумма денег, полученная брокером за эти 99 дней равна сумме 99-ти первых членов последовательности, заданной формулой $a_n = n(1000 - n)$ . Найдём её:

$S = 1 \cdot 99 + 2 \cdot 98 + 3 \cdot 97 + \ldots + 99 \cdot 1 =$
$= 1 \cdot (100 - 1) + 2 \cdot (100 - 2) + 3 \cdot (100 - 3) + \ldots + 99 \cdot (100 - 99) =$
$= 100 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 99) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2) =$
$= 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 99) \cdot 99 - \frac{1}{6} \cdot 99 \cdot (99 + 1) \cdot (2 \cdot 99 + 1) =$
$= 100 \cdot 50 \cdot 99 - 33 \cdot 50 \cdot 199 = 33 \cdot 50 \cdot (100 \cdot 3 - 199) =$
$= 1650 \cdot 101 = 166\,650.$

При вычислении использовалась известная формула суммы $n$ первых членов натурального ряда $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ и формула

$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ суммы квадратов $n$ первых членов натурального ряда. Докажем её, используя многократно формулу разности кубов $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ . Запишем эту формулу при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$:

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
. . . . . .
$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

Сложив эти равенства, после упрощения получим $(n+1)^3 - 1^3 = 3S_n + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n.$

Осталось выразить из этого равенства $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

*Ответ:* 166 650 рублей.

**18.** Убедитесь, что уравнение $|x| + |y| = a$ в координатной плоскости задаёт квадрат с центром в начале координат, диагональ которого равна $2a$. Для этого рассмотрите четыре различных случая:

1) $x \geqslant 0, y \geqslant 0;$
2) $x < 0, y \geqslant 0;$
3) $x < 0, y < 0;$
4) $x \geqslant 0, y < 0,$

то есть по четвертям.

Построим график первого уравнения. Заметим, что при $x \geq 0$, получим уравнение квадрата с центром в точке $(3;\ 5)$, диагональ которого равна 8. Выберем ту часть квадрата, которая лежит в правой полуплоскости. При $x < 0$, получим уравнение квадрата с центром в точке $(-3;\ 5)$, диагональ которого равна 8. Выберем ту часть квадрата, которая лежит в левой полуплоскости. Таким образом, первое уравнение системы задаёт линию, представляющую собой объединение двух неполных квадратов. Эта линия нарисована жирным и симметрична относительно оси $Oy$ (см. рис. 193).

Второе уравнение $|x - 2| + |y - 3| = a$ системы определяет квадрат с центром $(2;\ 3)$ с переменной диагональю $2a$.

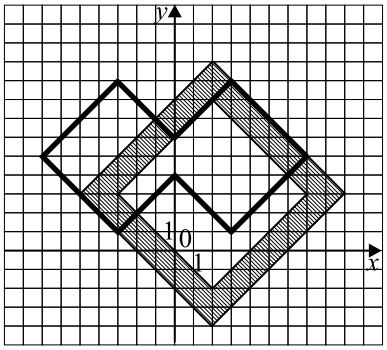


Рис. 193

В координатной плоскости изображены два квадрата при $a = 5$ и $a = 7$. Заметим, что если квадрат $|x - 2| + |y - 3| = a$ попадает в серую область, то он пересекает в четырёх точках график первого уравнения системы. Это произойдёт при $5 < a < 7$.

*Ответ:* $5 < a < 7$.

**19.** а) Можно. Данная последовательность убывающая, поэтому будем искать убывающую прогрессию. Заметим, что последовательность $\frac{4}{n};\ \frac{3}{n};\ \frac{2}{n};\ \frac{1}{n}$ является убывающей арифметической прогрессией, её разностью является число $-\frac{1}{n}$. Остаётся подобрать знаменатель $n$ таким, чтобы сократились числители. Понятно, что в качестве знаменателя n можно взять кратное всех числителей, например, число 12. Тогда получим арифметическую прогрессию $\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12}$, удовлетворяющую условию задачи.

б) Можно. Последовательность $\frac{100}{n};\ \frac{99}{n};\ \ldots;\ \frac{3}{n};\ \frac{2}{n};\ \frac{1}{n}$ является убывающей арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{n}$. Если в качестве знаменателя $n$ взять число $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, то после сокращения дробей получим 100 различных дробей, все числители которых равны 1, то есть получим искомую арифметическую прогрессию.

в) Нельзя. В самом деле, любая арифметическая прогрессия является линейной функцией на множестве натуральных чисел. В данном случае убывающей, значит, прямая на которой лежат точки, соответствующие членам этой прогрессии будет пересекать ось $Ox$. Поэтому начиная с некоторого номера все члены арифметической прогрессии станут отрицательными, а в данной последовательности нет отрицательных членов. Значит, в данной бесконечно убывающей последовательности нельзя выбрать бесконечное множество чисел, которые образуют арифметическую прогрессию.

*Ответ:* а) да; б) да; в) нет.

## Решение варианта 34

**1.** В декабре стоимость 1 кг яблок составляла 160% стоимости 1 кг яблок в сентябре. Значит, после подорожания 1 кг яблок стоил $40 \cdot 1{,}6 = 64$ рубля.

*Ответ:* 64.

**2.** Находим на горизонтали число 300, на оси ординат этому числу соответствует отметка 2. То есть подъёмная сила равна 2 тс.

*Ответ:* 2.

**3.** Расстояние от точки $A$ до прямой $BC$ равно 4 (см. рис. 194).

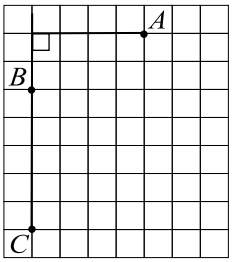


Рис. 194

*Ответ:* 4.

**4.** Первый мальчик займёт одно из 21 мест. После этого для второго мальчика останется 20 свободных мест, из которых два рядом с первым мальчиком. Всего исходов (занять определённое место) 20, из них благоприятных 2. По определению, вероятность равна $\frac{2}{20} = 0{,}1$.

*Ответ:* 0,1.

**5.** $\cos\frac{\pi(x-9)}{6} = -0{,}5,\ \frac{\pi(x-9)}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\frac{\pi(x-9)}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{x-9}{6} = \frac{2}{3} + 2k,\ x - 9 = 4 + 12k,\ x = 13 + 12k$, наименьший положительный корень данного вида при $k = -1$ $x = 13 - 12 = 1$.

$\frac{\pi(x-9)}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{x-9}{6} = -\frac{2}{3} + 2k,\ x - 9 = -4 + 12k,\ x = 5 + 12k$, наименьший положительный корень данного вида при $k = 0$ $x = 5$.
Значит, наименьший положительный корень уравнения $x = 1$.

*Ответ:* 1.

**6.** Угловая величина всей окружности составляет 360°, дуга составляет $\frac{5}{18}$ окружности, то есть $360° \cdot \frac{5}{18} = 100°$. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то есть $100° : 2 = 50°$.

*Ответ:* 50.

**7.** Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 11x - 3$ в произвольной точке $x_0$ равен $y'(x_0)$. Но $y' = 3x^2 + 6x - 11$, значит $y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 11$. Угловой коэффициент касательной $y = -2x - 8$, указанной в условии равен $-2$. Поэтому находим такое значение $x_0$, что $3x_0^2 + 6x_0 - 11 = -2$, $3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0$. По формулам корней квадратного уравнения получаем, что либо $x_0 = -3$, либо $x_0 = 1$.

Заметим, что $y(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 11 \cdot (-3) - 3 = 30$, а $y(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 - 3 = -10$. Получаем две возможные точки касания: $(-3; 30); (1; -10)$. Выясним, через какую из них проходит касательная $y = 2x - 8$. Координаты точки $(-3; 30)$ не удовлетворяют уравнению касательной, так как равенство $30 = -2 \cdot (-3) - 8$ не является верным. Но равенство $-10 = (-2) \cdot 1 - 8$ является верным. Поэтому касательная проходит через точку $(1, -10)$ с абсциссой, равной 1.

*Ответ:* 1.

**8.** Треугольник $BEE_1$ — прямоугольный, так как ребро $E_1E$ перпендикулярно плоскости основания призмы, прямым углом будет угол $BEE_1$. Тогда по теореме Пифагора $(BE_1)^2 = (BE)^2 + (EE_1)^2$. Найдём $BE$. Около правильного шестиугольника можно описать окружность. Её центром является точка $O$ пересечения диагоналей шестиугольника. Эти диагонали разбивают шестиугольник на шесть равносторонних треугольников, со стороной равной стороне шестиугольника. Поэтому $BE = 2BO = 2AB = 2\sqrt{2}$, $(BE)^2 = 8$. Отсюда, $(BE_1)^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8 + 2 = 10$ (см. рис. 195).

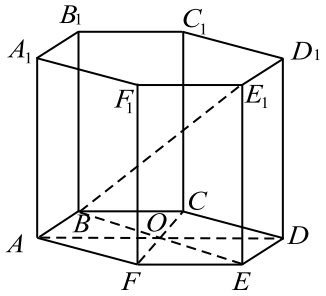


Рис. 195

*Ответ:* 10

**9.** $-7 \cos 2\alpha = -7 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = -7 \cdot (2 \cdot (-0{,}8)^2 - 1) = -7 \cdot (0{,}28) = = -1{,}96$.

*Ответ:* $-1{,}96$.

**10.** Решим неравенство $I \leqslant 0{,}5 \cdot I_{\text{кз}}$ при условии, что $r = 2$ Ом. $\dfrac{\varepsilon}{R + r} \leqslant 0{,}5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{r}$; $\dfrac{1}{R + 2} \leqslant \dfrac{5}{10 \cdot 2}$; $\dfrac{1}{R + 2} \leqslant \dfrac{1}{4}$; $R \geqslant 2$. Итак, наименьшее сопротивление цепи, при котором сила тока будет составлять не более 50% от силы тока короткого замыкания, равно 2 Ом.

*Ответ:* 2

**11.** Пусть $x$ деталей делает второй рабочий за один час. Тогда первый рабочий за один час делает $(x + 2)$ детали. Первый рабочий выполнит заказ на изготовление 360 деталей за $\dfrac{360}{x + 2}$ ч, второй рабочий — за $\dfrac{360}{x}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{360}{x} - \dfrac{360}{x + 2} = 2$,

$180(x + 2 - x) = x(x + 2)$,

$360 = x^2 + 2x$, $x^2 + 2x - 360 = 0$, $x_1 = 18$, $x_2 = -20$. Отрицательное значение не удовлетворяет условию. Второй рабочий делает 18 деталей в час.

*Ответ:* 18.

**12.** Найдём производную исходной функции
по формуле производной произведения
$y' = (x-11)'e^{x-10} + (x-11)\left(e^{x-10}\right)' = e^{x-10} + (x-11)e^{x-10} =$
$= (x-10)e^{x-10}$. Вычислим нули производной: $y' = 0$; $(x-10)e^{x-10} = 0$; $x = 10$. Заметим, что при $x < 10$ выполняется неравенство $y' < 0$, при $x > 10$ выполняется неравенство $y' > 0$. Значит, функция $y = (x-11)e^{x-10}$ возрастает при $x > 10$ и убывает при $x < 10$ (см. рис. 196).

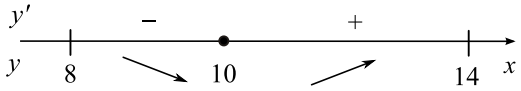


Рис. 196

Значение $x = 10$ принадлежит отрезку $[8; 14]$, наименьшее значение на указанном отрезке достигается при $x = 10$ и равно $y(10) = (10-11)e^{10-10} = -1$.

*Ответ:* $-1$.

**13.** а) Найдём ОДЗ уравнения: $\cos 2x \neq -1$, $\cos(\pi + x) \neq -1$; Отсюда ОДЗ: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $x \neq 2\pi n$, $n \in Z$.. Заметим, что при $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, .
Полученное множество значений $x$ не входит в ОДЗ.

Значит, $\sin x \neq 1$.

Разделим обе части уравнения на множитель $(\sin x - 1)$, отличный от нуля. Получим уравнение $\dfrac{1}{1+\cos 2x} = \dfrac{1}{1+\cos(\pi + x)}$, или уравнение $1 + \cos 2x = 1 + \cos(\pi + x)$. Применяя в левой части формулу понижения степени, а в правой — формулу приведения, получим уравнение $2\cos^2 x = 1 - \cos x$. Это уравнение с помощью замены $\cos x = t$, где $-1 \leqslant t \leqslant 1$ сводим к квадратному: $2t^2 + t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Возвращаясь к переменной $x$, получим $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = -1$, откуда $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Решим неравенства 1) $-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$,
2) $-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$, 3) $-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \pi + 2\pi k \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$, $m, n, k \in Z$.

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi m \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{3} + 2m \leqslant -\frac{1}{2}$, $-\frac{11}{6} \leqslant 2m \leqslant -\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{12} \leqslant m \leqslant -\frac{5}{12}$.

Нет целых чисел, принадлежащих промежутку

$\left[-\frac{11}{12}; -\frac{5}{12}\right]$.

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{2} \leqslant -\frac{1}{3} + 2n \leqslant -\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{6} \leqslant 2n \leqslant -\frac{1}{6}$, $-\frac{7}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{1}{12}$.

Нет целых чисел, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{7}{12}; -\frac{1}{12}\right]$.

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \pi + 2\pi k \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{2} \leqslant 1 + 2k \leqslant -\frac{1}{2}$. $-\frac{5}{2} \leqslant 2k \leqslant -\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4} \leqslant k \leqslant -\frac{3}{4}$. Этому неравенству удовлетворяет $k = -1$, тогда $x = -\pi$.

Ответ. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi m$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi k$, $m, n, k \in Z$; б) $-\pi$.

**14.**

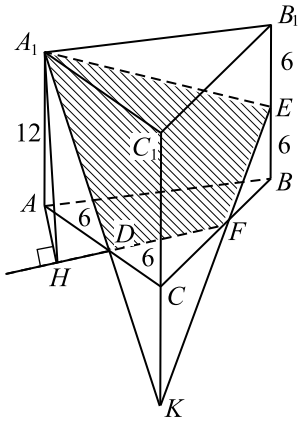


Рис. 197.

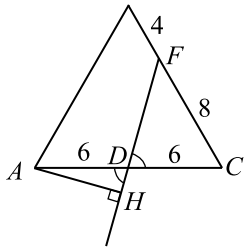


Рис. 198.

а) Пусть $D$ и $E$ — середины рёбер $AC$ и $BB_1$ соответственно. В плоскости $AA_1C_1$ проведём прямую $A_1D$, которая пересекает прямую $CC_1$ в точке K (см. рис. 197)), в плоскости $BB_1C_1$ — прямую $KE$, которая пересекает ребро $BC$ в точке $F$. Соединяя точки $A_1$ и $E$, лежащие в плоскости $AA_1B_1$, а также $D$ и $F$, лежащие в плоскости $ABC$, получим сечение $A_1EFD$.

$\triangle AA_1D = \triangle CDK$ по катету $AD = DC$ и острому углу $\angle ADA_1 = \angle CDK$ — как вертикальные, откуда следует, что $AA_1 = CK = 12$. $\triangle CKF$ и $\triangle BFE$ подобны по двум углам $\angle FBE = \angle FCK = 90°$, $\angle EFB = \angle CFK$ — как вертикальные. Отсюда: $\frac{CK}{EB} = \frac{12}{6} = 2$, то есть коэффициент подобия равен 2, откуда следует, что $CF : FB = 2 : 1$.

б) Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен углу $AHA_1$. Действительно, отрезок $AH \perp DF$ ($DF$ — линия пересечения этих плоскостей) и является проекцией отрезка $A_1H$ на плоскость основания, следовательно, по теореме о

трёх перпендикулярах, $A_1H \perp DF$. $\angle AHA_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{AA_1}{AH}$. $AA_1 = 12$, найдём $AH$. $\angle ADH = \angle FDC$ (как вертикальные) (см. рис. 198). По теореме косинусов в $\triangle DFC$:

$DF^2 = FC^2 + DC^2 - 2FC \cdot DC \cdot \cos 60°$, $DF^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 52$.

$FC^2 = DF^2 + DC^2 - 2DF \cdot DC \cdot \cos \angle FDC$,

$8^2 = 52 + 36 - 2\sqrt{52} \cdot 6 \cdot \cos \angle FDC$, $\cos \angle FDC = \dfrac{24}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 6} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$. Следовательно, $\angle FDC$ — острый и $\sin \angle FDC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FDC} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Заметим, что $\angle ADH = \angle FDC$, тогда из $\triangle ADH$ $AH = AD \cdot \sin \angle ADH$. $AH = 6 \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. $\angle AHA_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{AA_1}{AH} = \operatorname{arctg}\dfrac{12 \cdot \sqrt{13}}{12\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

*Ответ:* $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

**15.** ОДЗ неравенства $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Т.к. $\dfrac{1}{\log_x 0,5} = -\dfrac{1}{\log_x 2} = -\log_2 x$, а $\log_{4x} 2 = \dfrac{1}{\log_2 x + 2}$, то неравенство примет вид $-\log_2 x + 6 \geqslant \dfrac{16}{\log_2 x + 2}$. Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\dfrac{16}{t+2} + t - 6 \leqslant 0$, $\dfrac{(t-2)^2}{t+2} \leqslant 0$, $t = 2$ или $t < -2$. $\log_2 x = 2$, откуда $x = 4$ или $\log_2 x < -2$, откуда $x < \dfrac{1}{4}$. Учитывая ОДЗ, получим $0 < x < \dfrac{1}{4}$, $x = 4$.

*Ответ:* $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$, 4.

**16.** а) Используя условие, выполним рисунок (см. рис. 199)) Проведём радиус $AF$ в точку касания. $AF \perp CF$. $\triangle AFM \sim \triangle MCD$ по двум углам ($\angle AFM = \angle CDM = 90^0$, $\angle AMF = \angle CMD$ как вертикальные). $AF : CD = 8 : 16 = 1 : 2$, откуда следует, что $AM : MC = 1 : 2$, т.е.$MC = 2AM$.

б) Пусть $AM = x$, тогда $CM = 2x$, $MD = 22 - x$.

Для прямоугольного треугольника $CDM$ справедлива теорема Пифагора: $CM^2 = CD^2 + MD^2$, т.е. $4x^2 = 16^2 + (22 - x)^2$, $3x^2 + 44x - 740 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $x = 10$. Итак, $AM = 10$.

*Ответ:* 10.

**17.** Пусть объём всех мощностей, занятых под производство, равен 1, $x$ — доля мощностей цеха, занятых под производство вареников с вишней, а $y$ — доля мощностей, занятых под производство вареников с картофелем. Тогда $x + y = 1$, при этом вареников с вишней производится $80x$ центнеров, а с картофелем — $105y$ центнеров. Кроме того, из усло-

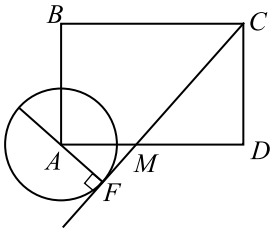


Рис. 199

вия ассортиментности следует, что $80x \geqslant 5$, $105y \geqslant 5$, откуда $x \geqslant \frac{1}{16}$, $y \geqslant \frac{1}{21}$. Тогда

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ x \geqslant \frac{1}{16}, y \geqslant \frac{1}{21} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{16} \leqslant x \leqslant \frac{20}{21}. \end{cases}$$

Т.к. каждый центнер вареников с вишней даёт цеху прибыль 6000 руб. (17 000 − 11 000), а центнер вареников с картофелем — 9000 руб. (18 000 − 9000), то общая прибыль от произведённой за месяц продукции равна $6000 \cdot 80x + 9000 \cdot 105y = 480\,000x + 945\,000y = 5000(96x + 189y)$.

По условию задачи нужно найти максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства вареников за 1 месяц.

Значит, необходимо найти наибольшее значение выражения $5000(96x + 189y)$ при условии $\begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{16} \leqslant x \leqslant \frac{1}{21}. \end{cases}$

$5000(96x + 189y) = 5000(96x + 189(1 - x)) = 5000(189 - 93x)$.

Пусть $g(x) = 5000(189 - 93x)$. Очевидно, $g(x)$ — убывающая функция, которая принимает наибольшее значение в левом конце промежутка $\left[\frac{1}{16}; \frac{20}{21}\right]$:

$g(\frac{1}{16}) = 5000(189 - 93 \cdot \frac{1}{16}) = \frac{5000}{16} \cdot 2931 = \frac{625}{2} \cdot 2931 = 915\,937{,}5$. Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна 915 937, 5 рублей.

*Ответ:* 915 937,5.

**18.** Уравнение $x^3 - x^2 - x\log_2(a - 1) + 12 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 3]$, если графики функций $y = x^3 - x^2$ и $y = x\log_2(a - 1) - 12$ имеют единственную точку пересечения, на отрезке $[0; 3]$.

Построим графики этих функций (см. рис. 201).

1) $y = x^3 - x^2$.

Найдём стационарные точки: $y' = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$, $y' = 0$ при $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$.

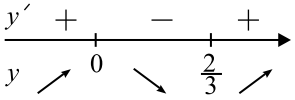


Рис. 200

$y(0) = 0, y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}, y(1) = 0, y(3) = 18.$

2) $y = x\log_2(a-1) - 12$. Графиком функции $y = x\log_2(a-1) - 12$ является прямая, угловой коэффициент которой $k = \log_2(a-1)$. Прямая $y = kx - 12$ проходит через точку $A(0; -12)$. Найдём точку $x_0$, в которой прямая $y = kx - 12$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2$.

Уравнение касательной $y = (x_0^3 - x_0^2) + (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0)$ проходит через точку $A(0; -12)$, следовательно, $-12 = (x_0^3 - x_0^2) - x_0(3x_0^2 - 2x_0)$, $-2x_0^3 + x_0^2 + 12 = 0$, $2x_0^3 - x_0^2 - 12 = 0$. $x_0 = 2$ — точка касания. Так как $2x_0^3 - x_0^2 - 12 = (x_0 - 2)(2x_0^2 + 3x_0 + 6)$, то $x = 2$ — единственный корень уравнения $(x-2)(2x_0^2 + 3x_0 + 6) = 0$. Других точек касания нет, так как уравнение $2x_0^2 + 3x_0 + 6 = 0$ корней не имеет. Если $x = 2$, то $y(2) = 2^3 - 2^2 = 4$. Тогда $4 = 2k - 12$, $k = 8$, $y = 8x - 12$ — уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - x^2$, проходящей через точку $A(0; -12)$. Найдём значение $k$ при котором прямая $y = kx - 12$ проходит через точку $B(3; 18)$. $18 = 3k - 12$, $k = 10$, $y = 10x - 12$.

Для $8 < k \leqslant 10$ графики функций $y = x^3 - x^2$ и $y = kx - 12$ имеют две общие точки (см. рис. 201)

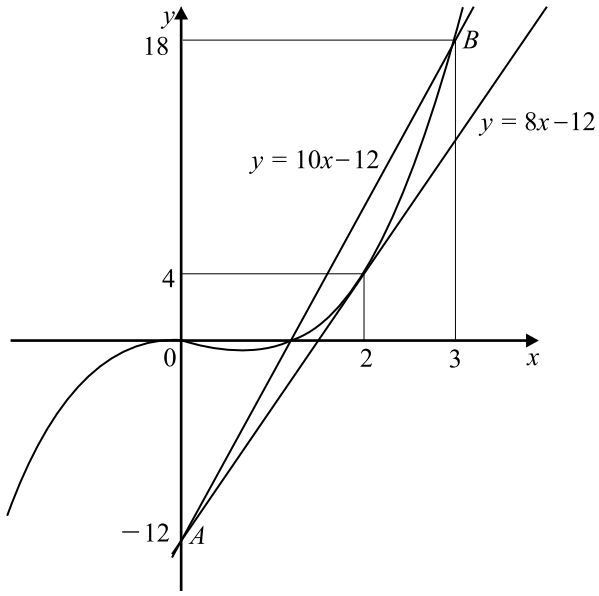


Рис. 201

Для $k > 10$ и $k = 8$ графики имеют единственную общую точку при $x \in [0;\ 3]$.

Найдём значения параметра $a$.

$\log_2(a-1) = 8$, $a - 1 = 2^8$, $a = 257$.

$\log_2(a-1) > 10$, $a - 1 > 2^{10}$, $a > 1025$.

*Ответ:* $257, (1025; +\infty)$.

**19.** а) 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270.

б) Предположим, что такая прогрессия существует. Очевидно, она возрастающая. Обозначим $a_l$ — наименьший член прогрессии, кратный 90. Тогда $a_l$, $a_{l+i}$, $a_{l+2i}$, ...,

$a_{l+10i}$ — 11 первых членов прогрессии, кратных 90, причём $l + 10i \leqslant 40$, $l + 11i > 40$. Из неравенства $l + 10i \leqslant 40$ следует, что $i \leqslant 3$ ($l \geqslant 1$), тогда $40 - 11i < l \leqslant 40 - 10i$.

Если $i = 3$, тогда $7 < l \leqslant 10$. Если $i = 2$, тогда $18 < l \leqslant 20$. Если же $i = 1$, тогда $l = 30$.

В каждом из этих случаев получаем противоречие с предположением, что $a_l$ — наименьший, кратный 90, член прогрессии.

Итак, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_{40}$ ровно 11 чисел кратны 90.

в) Среди любых 90 подряд идущих членов ровно один делится на 90. Пусть $3n = 90s + r$, где $s, r \in Z$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant 89$ ($r$ — остаток от деления $n$ на 90). Тогда среди чисел $a_1$, $a_2 \ldots a_{3n}$ на 90 делятся $s$ или $(s + 1)$ чисел. Среди чисел $a_{3n+1}$, $a_{3n+2}$, …, $a_{6n}$ на 90 тоже делятся не менее $s$ чисел. Если $n \geqslant 90$ то среди чисел $a_{6n+1}$, $a_{6n+2}$, …, $a_{7n}$ хотя бы одно делится на 90. Тогда среди чисел $a_{3n+1}$, …, $a_{7n}$ на 90 делятся хотя бы $(s + 1)$, значит, не меньше чем среди чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_{3n}$.

Пусть теперь $68 \leqslant n < 90$. Тогда $204 \leqslant 3n < 270$ и $272 \leqslant 4n < 360$. Тогда среди чисел $a_1$, …, $a_{3n}$ на 90 делится чисел не более чем частное $\dfrac{3n}{90} = \dfrac{n}{30}$, округлённое до целых с избытком, и среди чисел $a_{3n+1}$, …, $a_{7n}$ не менее, чем частное $\dfrac{4n}{90} = \dfrac{2n}{45}$, округлённое до целых с недостатком. Заметим, что $\dfrac{2n}{45} > 3$ и частное, округлённое до целых с недостатком, равно 3. Аналогично, $\dfrac{n}{30} < \dfrac{90}{30} = 3$ и частное $\dfrac{n}{30}$, округлённое до целых с избытком, равно 3. Значит, среди членов $a_1$, $\ldots a_{3n}$ чисел, делящихся на 90, не может быть строго больше, чем среди чисел $a_{3n+1}$, …, $a_{7n}$ при $n \geqslant 68$.

Таким образом, $n \leqslant 67$. Приведём пример подходящей последовательности для $n = 67$. Пусть $a_1 = 70$. Тогда среди чисел $a_1$ …, $a_{201}$ на 90 делятся $a_{21}$, $a_{111}$ и $a_{201}$, а среди чисел $a_{202}$, …, $a_{469}$ — числа $a_{291}$ и $a_{381}$.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 67.

## Решение варианта 35

**1.** В школе из 225 выпускников девятых и одиннадцатых классов $100\% - 60\% = 40\%$ — выпускники 11-ых классов, что составляет $225 \cdot 0{,}4 = 90$ человек. По условию из них 70% планируют сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне, т.е. $90 \cdot 0{,}7 = 63$ человека.

*Ответ:* 63.

**2.** На оси ординат находим отметку 200 кгс. Проводим прямую, перпендикулярную оси ординат до пересечения с графиком; из этой точки (на графике) опускаем перпендикуляр на ось абсцисс, соответствующее значение равно 75. Угол наклона транспортёра к горизонту равен 75°.

*Ответ:* 75.

**3.** Длина средней линии $MN$ трапеции равна полусумме оснований: $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

$AD = 5$, $BC = 3$, $MN = \dfrac{5+3}{2} = 4$ (см. рис. 202).

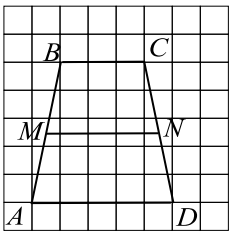


Рис. 202

*Ответ:* 4.

**4.** Вероятность того, что ручка исправная, равна $1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Найдём вероятность события «обе ручки исправны». Обозначим через $A$ и $B$ события «первая ручка исправна» и «вторая ручка исправна».
Получили $P(A) = P(B) = 0{,}95$.
Событие «обе ручки исправны» — это пересечение событий
$A \cap B$, его вероятность равна $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$.

*Ответ:* 0,9025.

**5.** $\log_3(4x - 8) = \log_3 12^2$, $4x - 8 = 144$, $4x = 152$, $x = 38$.

*Ответ:* 38.

**6.** Угловая величина всей окружности составляет $360°$, дуга, на которую опирается угол $C$, составляет 7 из $7+13 = 20$ частей, то есть $\dfrac{7}{20}$ окружности, $360° \cdot \dfrac{7}{20} = 126°$. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то есть $126° : 2 = 63°$.

*Ответ:* 63.

**7.** По формуле Ньютона-Лейбница разность $F(5) - F(0)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = 5$ и $x = 0$. По графику определяем, что указанная криволинейная трапеция является трапецией с основаниями, равными 5 и 3 и высотой 3. Её площадь равна $\dfrac{5+3}{2} \cdot 3 = 12$.

*Ответ:* 12.

**8.** Ребро $C_2D_2$ перпендикулярно плоскости $AA_2D_2D$, поэтому угол $C_2D_2A$ — прямой. По теореме Пифагора $(AC_2)^2 = (AD_2)^2 + (D_2C_2)^2$. $(AD_2)^2 = (AD)^2 + (DD_2)^2 = 4^2 + 4^2 = 32$. Отсюда, $(AC_2)^2 = 32 + 2^2 = 36$, $AC_2 = 6$ (см. рис. 203).

*Ответ:* 6.

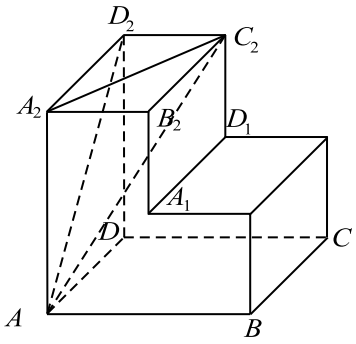


Рис. 203

**9.** $$\frac{16}{\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right)}=\frac{16\cdot 2}{2\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{32}{\sin\left(-\frac{29\pi}{2}\right)}=\frac{32}{-\sin\left(14\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{32}{-\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{-1}=-32.$$

*Ответ:* $-32$.

**10.** Пусть $h_0$ — расстояние до воды до дождя, $h$ — после дождя (в метрах). После дождя время падения $t$ уменьшится и станет равно $0{,}4-0{,}1=0{,}3$ с. Тогда $h_0-h=5(t_0^2-t^2)=5(0{,}4^2-0{,}3^2)=0{,}35$.

*Ответ:* 0,35.

**11.** Пусть первая труба пропускает $x$ литров воды в минуту. Тогда вторая труба пропускает за одну минуту $x+2$ литра. Первая труба заполняет резервуар объёмом 420 литров за время $\frac{420}{x}$ мин, а вторая труба заполняет резервуар объёмом 280 литров за $\frac{280}{x+2}$ мин, что различается на 15 минут.

Составим и решим уравнение: $\frac{420}{x}-\frac{280}{x+2}=15,\ \frac{84}{x}-\frac{56}{x+2}=3,$

$84(x+2)-56x=3x(x+2), 28x+168=3x^2+6x, 3x^2-22x-168=0,\ x_1=12, x_2=-\frac{14}{3}.$

Отрицательное значение не удовлетворяет условию. Первая труба пропускает 12 литров воды в минуту.

*Ответ:* 12.

**12.** Найдём производную исходной функции по формуле производной произведения $y'=(5x^2-70x+70)'e^{x-12}+(5x^2-70x+70)\left(e^{x-12}\right)'=$
$=(10x-70)e^{x-12}+(5x^2-70x+70)e^{x-12}=(5x^2-60x)e^{x-12}=$
$=5x(x-12)e^{x-12}$. Вычислим нули производной: $y'=0$; $5x(x-12)e^{x-12}=0$; $x_1=0$; $x_2=12$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 204) на заданном отрезке.

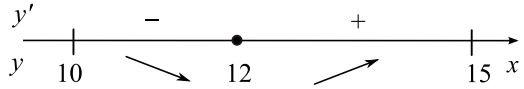


Рис. 204

Из рисунка видно, что на отрезке [10; 12] исходная функция убывает, а на отрезке [12; 15] — возрастает. Таким образом, наименьшее значение на отрезке [10; 15] достигается при $x = 12$ и равно $y(12) = (5 \cdot 12^2 - 70 \cdot 12 + 70)e^{12-12} = -50$.

*Ответ:* $-50$.

**13.** а) Преобразуем уравнение:

$\cos x = -\sin 2x$,

$\cos x + 2\sin x \cos x = 0$,

$\cos x(1 + 2\sin x) = 0$,

$\cos x = 0$; $\quad 1 + 2\sin x = 0$,

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad \sin x = -\dfrac{1}{2}$,

$x = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

б) Корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 205).

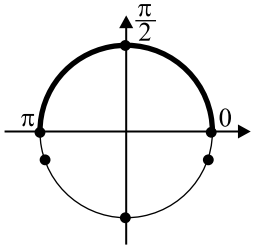


Рис. 205

Указанному промежутку принадлежит единственное число $\dfrac{\pi}{2}$.

*Ответ:* а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; б) $\dfrac{\pi}{2}$.

**14.** а) В $\triangle DCN$ и $\triangle MAD$ имеем: $\angle C = \angle A = 90°$, $CN = AM = \dfrac{1}{2}AB$, $CD = DA$ (см. рис. 206). Отсюда $\triangle DCN = \triangle MAD$ по двум катетам. Тогда $MD = DN$, $\triangle DMN$ равнобедренный. Значит, медиана $DK$ является также высотой. Следовательно, $DK \perp MN$.

$DD_1 \perp MND$ по условию, $D_1K$ — наклонная, $KD$ — проекция, $DK \perp MN$. Отсюда по теореме о трёх перпендикулярах $MN \perp D_1K$.

б) Как было доказано в п. а), $DK \perp MN$ и $MN \perp D_1K$, но $MN$ — линия пересечения плоскостей $MND_1$ и $ABC$, значит $\angle DKD_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями $MND_1$ и $ABC$.

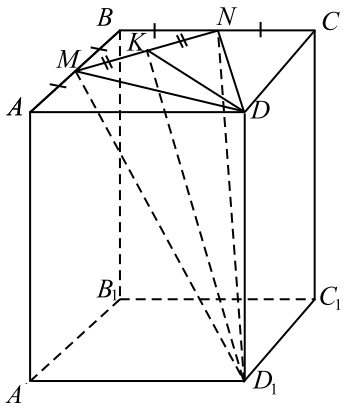


Рис. 206

В $\triangle DAM$ по теореме Пифагора $DM = \sqrt{DA^2 + AM^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$, $MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$. Следовательно, в $\triangle DKM$ по теореме Пифагора $DK = \sqrt{DM^2 - KM^2} = \sqrt{80 - 8} = 6\sqrt{2}$. Тогда в $\triangle DKD_1$ $\operatorname{tg} \angle DKD_1 = \dfrac{DD_1}{DK} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = 1$.

Значит, $\angle DKD_1 = 45^\circ$.

*Ответ:* $45^\circ$.

**15.** Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{11\log_4 x - 28 + (3\log_4 x - 4)(2\log_4 x - 1)}{2\log_4 x - 1} \geqslant 0.$$

Обозначим $\log_4 x = t$.

Тогда неравенство примет вид: $\dfrac{11t - 28 + 6t^2 - 11t + 4}{2t - 1} \geqslant 0$.

$$\frac{6t^2 - 24}{2t - 1} \geqslant 0,$$

$$\frac{(t-2)(t+2)}{t - \frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов (см. рис. 207).

$(t - 2)(t + 2) = 0, t = 2; t = -2.$

$t - \dfrac{1}{2} \neq 0, t \neq \dfrac{1}{2}.$

Получим $t \in \left[-2;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup [2;\ +\infty)$.

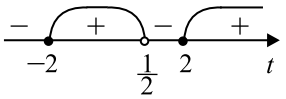


Рис. 207

Вернёмся к исходной переменной.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_4 x \geqslant -2,\\ \log_4 x < \dfrac{1}{2},\end{cases}\\ \log_4 x \geqslant 2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant \dfrac{1}{16},\\ 0 < x < 4^{\frac{1}{2}},\end{cases}\\ x \geqslant 16;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant \dfrac{1}{16},\\ 0 < x < 2,\end{cases}\\ x \geqslant 16;\end{array}\right. \quad x \in \left[\frac{1}{16};\ 2\right) \cup [16;\ +\infty).$$

*Ответ:* $\left[\frac{1}{16};\ 2\right) \cup [16;\ +\infty)$.

**16.** а) Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры касающихся окружностей. Через точку $P$ проведём общую касательную заданных окружностей и обозначим через $Q$ точку пересечения этой касательной с прямой $MN$ (см. рис. 208).

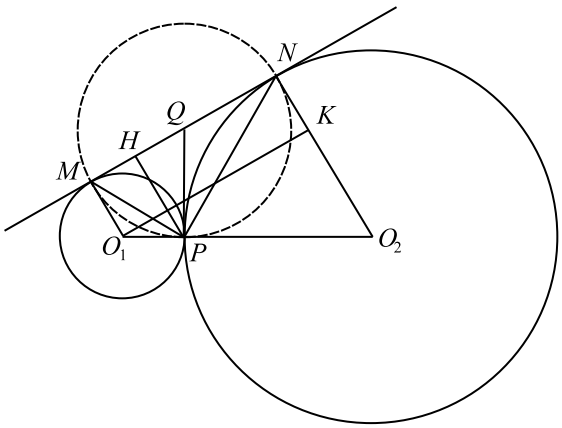


Рис. 208

По свойству касательных, проведённых к окружности, будем иметь: $QM = QP$, $QN = QP$. Значит, точки $M$, $N$ и $P$ равноудалены от точки $Q$, следовательно, $\angle MPN$ является вписанным в некоторую окружность с центром в точке $Q$ и радиусом $R = MQ$. При этом $\angle MPN$ опирается на диаметр $MN$, а значит, $\angle MPN = 90°$. Отсюда $\triangle MNP$ является прямоугольным.

б) Пусть $O_1$ — центр окружности радиуса 4, а $O_2$ — центр окружности радиуса 16. Рассмотрим $MNO_2O_1$: прямая $MN$ — касательная к исходным окружностям, $O_1M$ и $O_2N$ — радиусы, следовательно, $O_1M \perp MN$ и $O_2N \perp MN$. Отсюда $O_1M \parallel O_2N$, а значит $MNO_2O_1$ — прямоугольная трапеция.

Точка касания двух окружностей лежит на линии их центров, поэтому отрезок $O_1O_2$ пересекает касательную $PQ$ в точке $P$, следовательно, $O_1P = O_1M = 4$; $O_2P = O_2N = 16$; $O_1O_2 = O_1P + O_2P = 4 + 16 = 20$.

Проведём из точки $P$ перпендикуляр $PH$ к отрезку $MN$.

Очевидно, что $S_{\triangle MPN} = S_{MNO_2O_1} - S_{\triangle MPO_1} - S_{\triangle NPO_2}$.

Проведём отрезок $O_1K \perp NO_2, K \in NO_2$, получим прямоугольник $MNKO_1$, в котором $MN = O_1K$ и $KN = O_1M = 4$, а также прямоугольный $\triangle O_1KO_2$, в котором $KO_2 = NO_2 - NK = 16 - 4 = 12$.

Следовательно, по теореме Пифагора
$O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - KO_2^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, $MN = O_1K = 16$.

По теореме Фалеса $\dfrac{MH}{MN} = \dfrac{O_1P}{O_1O_2}$, следовательно,

$$MH = \frac{MN \cdot O_1P}{O_1O_2} = \frac{16 \cdot 4}{20} = \frac{16}{5},$$

отсюда $NH = MN - MH = 16 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{64}{5}$.

$$S_{MNO_2O_1} = \frac{MO_1 + NO_2}{2} \cdot MN = \frac{4 + 16}{2} \cdot 16 = \frac{20}{2} \cdot 16 = 160.$$

$MH$ равна высоте треугольника $MPO_1$, опущенной на сторону $MO_1$.

$$S_{\triangle MPO_1} = \frac{MH \cdot MO_1}{2} = \frac{\frac{16}{5} \cdot 4}{2} = 6{,}4.$$

$NH$ равна высоте треугольника $NPO_2$, опущенной на сторону $NO_2$.

$$S_{\triangle NPO_2} = \frac{NH \cdot NO_2}{2} = \frac{\frac{64}{5} \cdot 16}{2} = 102{,}4.$$

Значит, $S_{\triangle MPN} = 160 - 6{,}4 - 102{,}4 = 51{,}2$.

*Ответ:* 51,2.

**17.** Ясно, что за 6 месяцев Тамара не сможет выплатить долг, т.к. вернёт банку не более $250\,000 \cdot 6 = 1\,500\,000$ руб., а общий долг будет больше 1,5 млн, так как банк ещё начисляет проценты. Покажем, что Тамара выплатит весь долг за 7 месяцев.

Пусть все ежемесячные платежи, кроме, быть может, последнего, равны 250 тысяч рублей. Через месяц долг Тамары перед банком составит $1\,500\,000 \cdot 1{,}01 = 1\,515\,000$ руб. Затем Тамара выплатит 250 000 и задолженность составит 1 265 000 руб. После этого банк начислит проценты, но 1% от оставшейся суммы будет уже меньше 15 000 руб., а в дальнейшем будет становиться ещё меньше, так как сумма долга будет уменьшаться. Поэтому долг через 2 месяца будет менее 1 280 000, а после очередного платежа — менее 1 030 000. Аналогично через 3 месяца задолженность будет менее 1 045 000 руб., а после платежа — менее 795 000 рублей. Через 4 месяца долг будет менее 810 000, а после платежа — менее 560 000. Через 5 месяцев долг будет менее 575 000, а после платежа — менее 325 000. Через 6 месяцев долг будет менее 340 000, а после платежа — менее 90 000. Значит, через 7 месяцев задолженность будет менее 105 000, и Тамара своим последним платежом полностью расплатится с банком.

*Ответ:* 7

**18.** Если $x \geqslant 0$, то первое уравнение задаёт окружность $\phi_1$ с центром в точке $C_1(3;3)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность $\phi_2$ с центром в точке $C_2(-3;3)$ того же радиуса.

При $a > 0$ второе уравнение задаёт окружность $\phi$ с центром в точке $C(-3;0)$ радиуса $a$. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра $a$, при каждом из

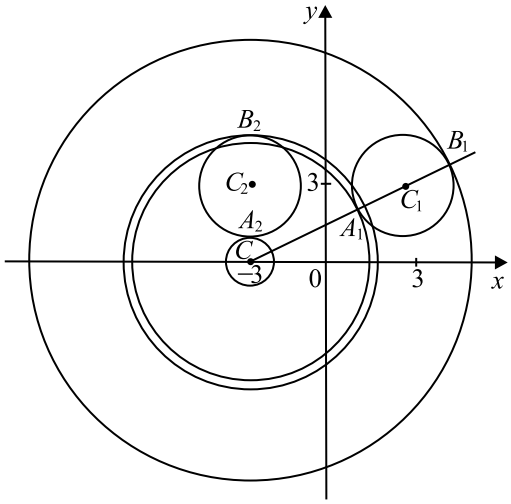


Рис. 209

которых окружность $\phi$ имеет единственную общую точку с объединением окружностей $\phi_1$ и $\phi_2$ (см. рис. 209).

Из точки $C$ проведём луч $CC_1$ и обозначим $A_1$ и $B_1$ точки его пересечения с окружностью $\phi_1$, где $A_1$ лежит между $C$ и $C_1$.

Так как $CC_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, то $CA_1 = 3\sqrt{5} - 2$, $CB_1 = 3\sqrt{5} + 2$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности $\phi$ и $\phi_1$ не пересекаются. При $CA_1 < a < CB_1$ окружности $\phi$ и $\phi_1$ имеют 2 общие точки. При $a = CA_1 = 3\sqrt{5} - 2$ или $a = CB_1 = 3\sqrt{5} + 2$, окружности $\phi$ и $\phi_1$ касаются.

Координаты точки касания окружностей $\phi$ и $\phi_2$ явно видны на чертеже: это точки $A_2(-3; 1)$ и $B_2(-3; 5)$. То есть при $a = 1$ и $a = 5$ окружности $\phi$ и $\phi_2$ касаются. При остальных значениях параметра $a$ окружности $\phi$ и $\phi_2$ либо имеют 2 общие точки, либо не имеют общих точек.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность $\phi$ касается ровно одной из двух окружностей $\phi_1$ и $\phi_2$ и не пересекается с другой.

Так как $1 < 3\sqrt{5} - 2 < 5 < 3\sqrt{5} + 2$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 1$ и $a = 3\sqrt{5} + 2$.

*Ответ:* $1; 3\sqrt{5} + 2$.

**19.** Пусть трёхзначное число имеет вид $\overline{abc}$, где $a$, $b$ и $c$ — цифры, причём $a \neq 0$. Тогда задуманное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c \geqslant 100$, а сумма его цифр равна $a + b + c \leqslant 9 + 9 + 9 = 27$.

а) Нет, так как рассматриваемое частное равно

$\dfrac{100a + 10b + c}{a + b + c} \geqslant \dfrac{100}{27} > 3$. Значит, трём оно равняться не может.

б) Да, может. Если $\dfrac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 28$, то

$100a + 10b + c = 28a + 28b + 28c$; $72a = 18b + 27c$; $8a = 2b + 3c$. Последнее равенство верно, например, при $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$. Значит, частное числа 140 и суммы его цифр равно $\dfrac{140}{1 + 4 + 0} = 28$.

в) Пусть $n$ — значение частного числа и суммы его цифр, причём $n$ — натурально. Тогда $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}=n$; $100a+10b+c=na+nb+nc$, $(100-n)a+(10-n)b=(n-1)c$.

Если $n\leqslant 10$, то $(100-n)a+(10-n)b\geqslant(100-n)a\geqslant(100-n)\cdot 1\geqslant 90$, а $(n-1)c\leqslant 9c$. Отсюда, $9c\geqslant 90$, $c\geqslant 10$, что невозможно, так как $c$ — цифра.

Значит, $n>10$, но тогда $n\geqslant 11$ (так как $n$ натурально). Для $n=11$ подберём пример. Из равенство $100a+10b+c=na+nb+nc$ в этом случае получим $89a=b+10c$. При $a=1$, $b=9$ и $c=8$ получаем требуемое. Таким образом, частное числа 198 и суммы его цифр равно 11. Это и есть наименьшее натуральное значение $n$.

*Ответ:* а) нет; б) да; в) 11.

## Решение варианта 36

**1.** В школе из 240 выпускников девятых и одиннадцатых классов $100\%-55\%=45\%$ — выпускники 11-ых классов, что составляет $240\cdot 0{,}45=108$ человек. По условию из них $75\%$ планируют сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне, т.е. $108\cdot 0{,}75=81$ человек.

*Ответ:* 81.

**2.** На оси ординат находим отметку 100 кгс. Проводим прямую, перпендикулярную оси ординат до пересечения с графиком; из этой точки (на графике) опускаем перпендикуляр на ось абсцисс, соответствующее значение равно 15. То есть, угол наклона транспортёра к горизонту равен 15°.

*Ответ:* 15.

**3.** Длина средней линии $MN$ трапеции равна полусумме оснований: $MN=\dfrac{AD+BC}{2}$.

$AD=7$, $BC=3$, $MN=\dfrac{7+3}{2}=5$ (см. рис. 210).

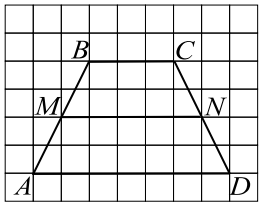


Рис. 210

*Ответ:* 5.

**4.** Вероятность того, что аккумулятор заряжён, равна $1-0{,}15=0{,}85$. Найдём вероятность события «оба аккумулятора заряжены». Обозначим через $A$ и $B$ события «первый аккумулятор заряжён» и «второй аккумулятор заряжён». Получили $P(A)=P(B)=0{,}85$. Событие «оба аккумулятора заряжены» — это пересечение событий $A\cap B$, его вероятность равна $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}85\cdot 0{,}85=0{,}7225$.

*Ответ:* 0,7225.

**5.** $\log_5(2x+70)=\log_5 5^2+\log_5 10$, $\log_5(2x+70)=\log_5(5^2\cdot 10)$, $2x+70=250$, $2x=180$, $x=90$. Проверка показывает, что 90 — корень уравнения.

*Ответ:* 90.

**6.** Угловая величина всей окружности составляет 360°, дуги, на которые опираются углы треугольника, составляют 2, 3 и 4 из $2+3+4=9$ частей, то есть бóльшая из них равна $\frac{4}{9}$ окружности, $360^\circ \cdot \frac{4}{9} = 160^\circ$. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то есть $160^\circ : 2 = 80^\circ$.

*Ответ:* 80.

**7.** По формуле Ньютона-Лейбница разность $F(9) - F(5)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = 9$ и $x = 5$. По графику определяем, что указанная криволинейная трапеция является трапецией с основаниями, равными 4 и 3 и высотой 3. Её площадь равна $\frac{4+3}{2} \cdot 3 = 10{,}5$.

*Ответ:* 10,5.

**8.** Ребро $D_2D$ перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому угол $D_2DB$ — прямой. Тогда $\operatorname{tg}\angle D_2BD = \frac{D_2D}{DB}$. По теореме Пифагора $(DB)^2 = (AD)^2 + (AB)^2 = 16 + 16 = 32$, $DB = 4\sqrt{2}$. Отсюда, $\operatorname{tg}\angle D_2BD = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(\operatorname{tg}\angle D_2BD)^2 = \frac{1}{2} = 0,5$ (см. рис. 211).

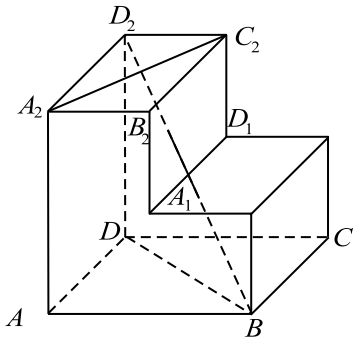


Рис. 211

*Ответ:* 0,5.

**9.** $$\frac{52}{\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)} = \frac{52\cdot 2}{2\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{104}{\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right)} = \frac{104}{\sin\left(-8\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{104}{\sin\frac{\pi}{2}} = 104.$$

*Ответ:* 104.

**10.** Пусть $h_0$ — расстояние до воды до дождя, $h$ — после дождя (в метрах). После дождя время падения $t$ уменьшится и станет равно $0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$ с. Тогда $h_0 - h = 5(t_0^2 - t^2) = 5(0{,}5^2 - 0{,}2^2) = 1{,}05$.

*Ответ:* 1,05.

**11.** Пусть $x$ литров воды в минуту пропускает первая труба. Тогда вторая труба пропускает за одну минуту $x + 3$ литра. Время, за которое первая труба заполняет резервуар

объёмом 180 литров, равно $\frac{180}{x}$ мин, а время, за которое вторая труба заполняет резервуар объёмом 36 литров, равно $\frac{36}{x+3}$ мин, что различается на 10 минут.

Составим и решим уравнение:

$\frac{180}{x} - \frac{36}{x+3} = 10,\ 180(x+3) - 36x = 10x(x+3),$

$90(x+3) - 18x = 5x(x+3),\ 72x + 270 = 5x^2 + 15x,\ 5x^2 - 57x - 270 = 0,$

$x_1 = 15,\ x_2 = -\frac{18}{5}.$

Отрицательное значение не удовлетворяет условию. Первая труба пропускает 15 литров воды в минуту.

*Ответ:* 15.

**12.** Найдём производную исходной функции по формуле производной произведения

$y' = (7x^2 - 56x + 56)'e^x + (7x^2 - 56x + 56)\left(e^x\right)' =$

$= (14x - 56)e^x + (7x^2 - 56x + 56)e^x = (7x^2 - 42x)e^x =$

$= 7x(x-6)e^x$. Вычислим нули производной: $y' = 0$; $7x(x-6)e^x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$.

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 212) на заданном отрезке.

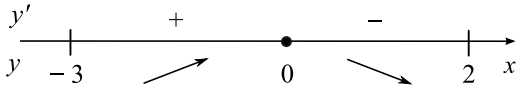


Рис. 212

Из рисунка видно, что на отрезке $[-3;\ 0]$ исходная функция возрастает, а на отрезке $[0;\ 2]$ — убывает. Таким образом, наибольшее значение на отрезке $[-3;\ 2]$ достигается при $x = 0$ и равно $y(0) = 7 \cdot 0^2 - 56 \cdot 0 + 56 = 56$.

*Ответ:* 56.

**13.** а) Преобразуем уравнение:

$-\sin x = \sin 2x,$

$\sin x + 2\sin x \cos x = 0,$

$\sin x(1 + 2\cos x) = 0,$

$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = -\frac{1}{2};\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 213). Получим числа $-\frac{4\pi}{3}; -\pi; -\frac{2\pi}{3}; 0$.

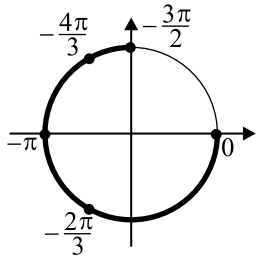


Рис. 213

*Ответ:* а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pi n$, $k, n \in Z$;

б) $-\frac{4\pi}{3}$; $-\pi$; $-\frac{2\pi}{3}$; 0.

**14.** а) В $\triangle ADM$ и $\triangle ABN$ имеем: $\angle ADM = \angle ABN = 90°$, $BN = DM = \frac{2}{3}BC$, $AD = AB$ (см. рис 214). Отсюда следует, что $\triangle ADM = \triangle ABN$ по двум катетам. Следовательно, $AM = AN$, $\triangle AMN$ равнобедренный. Значит, его медиана $AL$ является также высотой, то есть $AL \perp MN$.

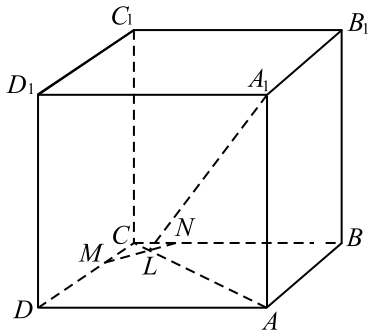


Рис. 214

Заметим, что $AA_1 \perp ABC$ по условию, $A_1L$ — наклонная, $AL$ — её проекция на плоскость $ABC$, $AL \perp MN$. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $A_1L \perp MN$.

б) Как было доказано в п. а), $AL \perp MN$ и $MN \perp A_1L$, но $MN$ — линия пересечения плоскостей $MNA_1$ и $ABC$, значит $\angle ALA_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями $MNA_1$ и $ABC$.

$BD = \sqrt{CD^2 + CB^2} = 6\sqrt{2}$.

Ясно, что $DM = \frac{2}{3}DC = 4$. В $\triangle DAM$ по теореме Пифагора

$AM = \sqrt{DA^2 + DM^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$.

$\triangle CMN \sim \triangle CDB$ по второму признаку $\Big($ $\angle C$ — общий, $\frac{CM}{CD} = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{3}\Big)$.

Тогда $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{3}$, $MN = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $LM = \sqrt{2}$. В $\triangle ALM$ по теореме Пифагора

$AL = \sqrt{AM^2 - LM^2} = \sqrt{52 - 2} = 5\sqrt{2}$. Тогда в $\triangle ALA_1$ $\operatorname{tg}\angle ALA_1 = \dfrac{AA_1}{AL} = \dfrac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Значит, $\angle ALA_1 = 60^\circ$.

*Ответ:* $60^\circ$.

**15.** Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{(3\log_9 x + 1) - (3 - \log_9 x)(2\log_9 x + 3)}{2\log_9 x + 3} \leqslant 0.$$

Обозначим $\log_9 x = t$. Тогда неравенство примет вид: $\dfrac{3t + 1 - (3 - t)(2t + 3)}{2t + 3} \leqslant 0$.

$$\frac{2t^2 - 8}{2t + 3} \leqslant 0, \frac{(t - 2)(t + 2)}{t + \dfrac{3}{2}} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов (см. рис. 215).

$(t - 2)(t + 2) = 0, t = -2, t = 2$.

$t + \dfrac{3}{2} \neq 0, t \neq -\dfrac{3}{2}$.

Получим $t \in (-\infty;\ -2] \cup \left(-\dfrac{3}{2};\ 2\right]$.

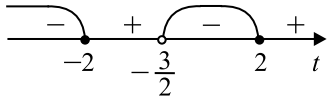


Рис. 215

Вернёмся к исходной переменной.

$$\left[\begin{array}{l} \log_9 x \leqslant -2, \\ \left\{\begin{array}{l} \log_9 x > -\dfrac{3}{2}, \\ \log_9 x \leqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 9^{-2}, \\ \left\{\begin{array}{l} x > \left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}, \\ 0 < x \leqslant 81; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \dfrac{1}{81}, \\ \left\{\begin{array}{l} x > (27)^{-1}, \\ 0 < x \leqslant 81; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \dfrac{1}{81}, \\ \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{27}, \\ 0 < x \leqslant 81; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$x \in \left(0;\ \dfrac{1}{81}\right] \cup \left(\dfrac{1}{27};\ 81\right]$.

*Ответ:* $\left(0;\ \dfrac{1}{81}\right] \cup \left(\dfrac{1}{27};\ 81\right]$.

**16.** а) Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры касающихся окружностей.

Через точку $T$ проведём общую касательную заданных окружностей и обозначим через $Q$ точку пересечения этой касательной с прямой $KN$ (см. рис. 216).

По свойству касательных, проведённых к окружности, будем иметь: $QK = QT$, $QN = QT$. Значит, точки $K$, $N$ и $T$ равноудалены от точки $Q$, следовательно, $\angle KTN$ является вписанным в некоторую окружность с центром в точке $Q$ и радиусом $R = KQ$. При этом $\angle KTN$ опирается на диаметр $KN$. По построению $\angle KSN$ также опирается на диаметр, значит $\angle KSN = 90^\circ$, а это и означает, что $KS \perp SN$.

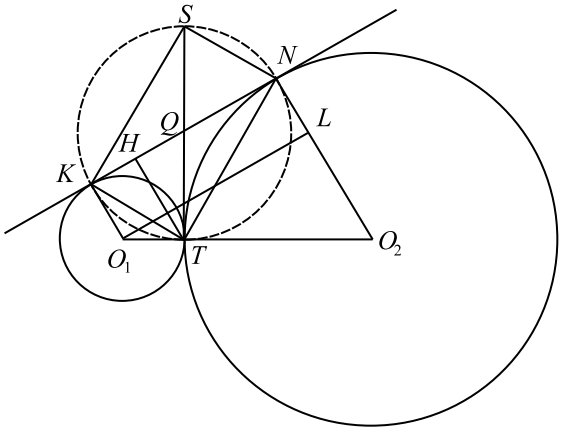


Рис. 216

б) Заметим, что $\triangle KQT = \triangle NQS$ (так как $\angle KQT = \angle SQN$ как вертикальные, $KQ = QT = SQ = NQ$ как радиусы окружности).
Аналогично, $\triangle TQN = \triangle KQS$. Тогда
$S_{KTNS} = S_{KQT} + S_{TQN} + S_{KQS} + S_{SQN} = 2(S_{KQT} + S_{TQN}) = 2S_{KTN}$. Пусть $O_1$ — центр окружности радиуса 1, а $O_2$ — центр окружности радиуса 3. Рассмотрим четырёхугольник $KNO_2O_1$. Прямая $KN$ — касательная к исходным окружностям, а $O_1K$ и $O_2N$ — радиусы. Следовательно, $O_1K \perp KN$ и $O_2N \perp KN$. Отсюда $O_1K \parallel O_2N$, а значит $KNO_2O_1$ — прямоугольная трапеция.

Точка касания двух окружностей лежит на линии их центров, поэтому отрезок $O_1O_2$ пересекает касательную $TQ$ в точке $T$. Тогда $O_1T = O_1K = 1$; $O_2T = O_2N = 3$; $O_1O_2 = O_1T + O_2T = 1 + 3 = 4$.

Проведём из точки $T$ перпендикуляр $TH$ к отрезку $KN$.

Очевидно, что $S_{\triangle KTN} = S_{KNO_2O_1} - S_{\triangle KTO_1} - S_{\triangle NTO_2}$.

Проведём отрезок $O_1L \perp NO_2, L \in NO_2$, и получим прямоугольник $KNLO_1$, в котором $KN = O_1L$ и $LN = O_1K = 1$, а также прямоугольный $\triangle O_1LO_2$, в котором $LO_2 = NO_2 - NL = 3 - 1 = 2$.

Следовательно, по теореме Пифагора
$O_1L = \sqrt{O_1O_2^2 - LO_2^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, $KN = O_1L = 2\sqrt{3}$.

Найдём $S_{KTNS}$ двумя способами.

Способ 1.

По теореме Фалеса $\dfrac{KH}{KN} = \dfrac{O_1T}{O_1O_2}$.

Отсюда $KH = \dfrac{KN \cdot O_1T}{O_1O_2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $NH = KN - KH = 2\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{KNO_2O_1} = \frac{KO_1 + NO_2}{2} \cdot KN = \frac{1+3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle KTO_1} = \frac{KH \cdot KO_1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\triangle NTO_2} = \frac{NH \cdot NO_2}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Значит, $S_{KTN} = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда, $S_{KTNS} = 2S_{KTN} = 3\sqrt{3}$.

Способ 2.

$KTNS$ — прямоугольник, его площадь равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. $KN = ST = 2\sqrt{3}$. Из $\triangle O_1LO_2$ получим $\cos \angle LO_2O_1 = \frac{O_2L}{O_1O_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\angle LO_2O_1 = 60°$. $\angle NQT = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.

$$S_{KTNS} = \frac{KN \cdot ST \cdot \sin 120°}{2} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 3\sqrt{3}.$$

*Ответ:* $3\sqrt{3}$.

**17.** Ясно, что за 5 лет Тимофей не сможет выплатить долг, так как вернёт банку не более $400\,000 \cdot 5 = 2\,000\,000$ рублей, а общий долг будет больше 2 млн рублей, так как банк ещё начисляет проценты. Покажем, что Тимофей выплатит весь долг за 6 лет.

Пусть все ежегодные платежи, кроме, быть может, последнего, равны 400 000 рублей. Через год долг Тимофея перед банком составит $2\,000\,000 \cdot 1{,}02 = 2\,040\,000$ рублей. Затем Тимофей выплатит 400 000 и задолженность составит 1 640 000 руб. После этого банк начислит проценты, но 2% от оставшейся суммы будет уже меньше 40 000 рублей, а в дальнейшем будет становиться ещё меньше, так как сумма долга будет уменьшаться. Поэтому долг через 2 года будет менее 1 680 000, а после очередного платежа — менее 1 280 000. Аналогично через 3 года задолженность будет менее 1 320 000 рублей, а после платежа — менее 920 000 рублей. Через 4 года долг будет менее 960 000, а после платежа — менее 560 000. Через 5 лет долг будет менее 600 000, а после платежа — менее 200 000. Далее, через 6 лет долг будет менее 240 000 и Тимофей своим последним платежом полностью рассчитается с банком.

*Ответ:* 6.

**18.** Если $y \geqslant 0$, то первое уравнение задаёт окружность $\phi_1$ с центром в точке $C_1(4; 4)$ радиуса 3, а если $y < 0$, то оно задаёт окружность $\phi_2$ с центром в точке $C_2(4; -4)$ того же радиуса.

При $a > 0$ второе уравнение задаёт окружность $\phi$ с центром в точке $C(0;\ 4)$ радиуса $a$. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра $a$, при каждом из которых окружность $\phi$ имеет ровно две общие точки с объединением окружностей $\phi_1$ и $\phi_2$ (см. рис. 217).

Координаты точки касания окружностей $\phi$ и $\phi_1$ явно видны на чертеже — точки $A_1(1;\ 4)$ и $B_1(7;\ 4)$. То есть при $a = CA_1 = 1$ и $a = CB_1 = 7$ окружности $\phi$ и $\phi_1$ ка-

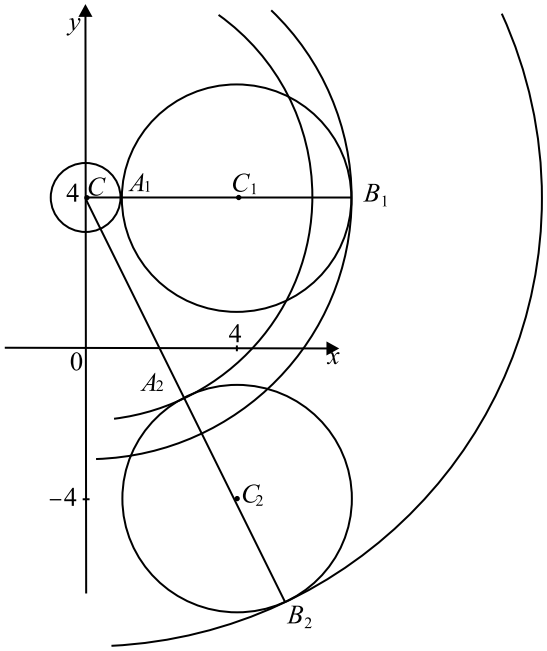


Рис. 217

саются. При $a > 7$ и $a < 1$ окружности $\phi$ и $\phi_1$ не пересекаются, при $1 < a < 7$ окружности $\phi$ и $\phi_2$ имеют 2 общие точки.

Далее, из точки $C$ проведём луч $CC_2$ и обозначим $A_2$ и $B_2$ точки его пересечения с окружностью $\phi_2$, где $A_2$ лежит между $C$ и $C_2$. Заметим, что длина отрезка $CC_2 = \sqrt{4^2 + (4 - (-4))^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности $\phi$ и $\phi_2$ не пересекаются. При $CA_2 < a < CB_2$ окружности $\phi$ и $\phi_2$ имеют 2 общие точки. При $a = CA_2 = 4\sqrt{5} - 3$ или $a = CB_2 = 4\sqrt{5} + 3$, окружности $\phi$ и $\phi_2$ касаются.

Исходная система имеет ровно 2 решения тогда и только тогда, когда окружность $\phi$ с одной из окружностей $\phi_1$ и $\phi_2$ имеет 2 общие точки, а с другой не пересекается, либо касается одновременно двух окружностей.

Так как $1 < 4\sqrt{5} - 3 < 7 < 4\sqrt{5} + 3$, то условию задачи удовлетворяют значения $a \in (1;\ 4\sqrt{5} - 3) \cup (7;\ 4\sqrt{5} + 3)$.

*Ответ:* $(1;\ 4\sqrt{5} - 3) \cup (7;\ 4\sqrt{5} + 3)$.

**19.** Пусть трёхзначное число имеет вид $\overline{abc}$, где $a$, $b$ и $c$ — цифры, причём $a \neq 0$. Тогда задуманное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, а сумма его цифр равна $a + b + c$.

а) Да, может. Например, частное числа 120 и суммы его цифр равно $\dfrac{120}{1 + 2 + 0} = 40$.

б) Нет, не может. Предположим противное. Если $\dfrac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 84$, то $100a + 10b + c = 84a + 84b + 84c$, $16a = 74b + 83c$. Отсюда следует, что $c$ чётно.

Так как $1 \leqslant a \leqslant 9$, то $16a \leqslant 16 \cdot 9 = 144$. При $c \geqslant 2$ получаем $74b + 83c \geqslant 83 \cdot 2 > 144 \geqslant 16a = 74b + 83c$. Отсюда $c < 2$, а так как $c$ — чётная цифра, то $c = 0$. Тогда $16a = 74b$ и $8a = 37b$. При этом $a \neq 0$, $b \neq 0$. Так как числа 8 и

37 взаимно просты, то $a$ должно делиться на 37, что невозможно, так как $a$ — ненулевая цифра.

в) Пусть $n$ — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Из пункта а) следует, что $n \geqslant 40$. Тогда $100a + 10b + c = na + nb + nc$. Тогда $(100 - n)a = (n - 10)b + (n - 1)c$. В правой части последнего равенства стоит неотрицательное число, следовательно, и $(100 - n)a \geqslant 0$, потому и $100 - n > 0$ (так как $a > 0$). Так как задуманное число не кратно 100, то $b + c \geqslant 1$, тогда $9(100 - n) \geqslant (100 - n)a = (n - 10)b + (n - 1)c \geqslant (n - 10)(b + c) \geqslant n - 10$, то есть $9(100 - n) \geqslant n - 10$; $10n \leqslant 910$; $n \leqslant 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

*Ответ:* а) да; б)нет; в) 91.

## Решение варианта 38

**1.** Для приготовления теста из 3 кг муки потребуется $3 \cdot 14 = 42$ г сухих дрожжей, поэтому нужно купить $42 : 10 = 4{,}2$ пакетиков сухих дрожжей, значит, 5 пакетиков.

*Ответ:* 5.

**2.** За первые две минуты реакции масса оставшегося реагента уменьшилась с 20 до 12 г, значит в реакцию вступило 8 г.

*Ответ:* 8.

**3.** $M$ — середина стороны $AB$, следовательно, $CM$ — медиана, $CM = 2$ (см. рис. 218).

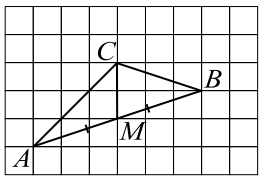


Рис. 218

*Ответ:* 2.

**4.** Частота события «стиральная машина в течение года поступит в гарантийный ремонт» равна $\dfrac{72}{1200} = 0{,}06$. От вероятности она отличается на

$0{,}065 - 0{,}06 = 0{,}005$.

*Ответ:* 0,005.

**5.** $\log_{4^3} 4^{5x+9} = 6$, $\dfrac{1}{3}\log_4 4^{5x+9} = 6$, $\log_4 4^{5x+9} = 6 \cdot 3$. По определению логарифма $5x + 9 = 18$, $5x = 9$, $x = 1{,}8$.

*Ответ:* 1,8.

**6.** Угол $C$ четырёхугольника $ABCD$ опирается на дугу $BD$, которая равна сумме дуг $AB$ и $AD$. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. $\angle C = (\smile AD + \smile AB) : 2 = (86^\circ + 102^\circ) : 2 = 94^\circ$.

*Ответ:* 94.

**7.** Заштрихованная фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$. По формуле Ньютона-Лейбница её площадь $S$ равна разности $F(3) - F(1)$, где $F(x)$ — указанная в условии первообразная функции $f(x)$. Поэтому $S = F(3) - F(1) = -3^3 + (4{,}5) \cdot 3^2 - 7 - (-1^3 + (4{,}5) \cdot 1^2 - 7) = = 6{,}5 - (-3{,}5) = 10$.

*Ответ:* 10.

**8.** Обозначим вершину конуса через $A$, а центр основания через $O$. Проведём через $AO$ плоскость. В этой плоскости будет находиться диаметр сферы $CB$ (см. рис. 219) и образующая конуса $AB$. Тогда треугольник $AOB$ — прямоугольный с прямым углом $AOB$. При этом $AO = OB = R$, где $R$ — радиус сферы. По теореме Пифагора $AO^2 + OB^2 = AB^2$, $R^2 + R^2 = AB^2$. $AB = R\sqrt{2} = 26\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 52$.

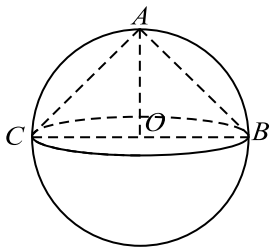


Рис. 219

*Ответ:* 52.

**9.** $(1 - \log_7 14)(1 - \log_2 14) = (1 - \log_7(7 \cdot 2))(1 - \log_2(2 \cdot 7)) =$
$= (1 - (\log_7 2 + \log_7 7))(1 - (\log_2 2 + \log_2 7)) =$
$= (1 - (1 + \log_7 2))(1 - (\log_2 7 + 1)) = -\log_7 2 \cdot (-\log_2 7) = \log_7 2 \cdot \dfrac{1}{\log_7 2} = 1.$

*Ответ:* 1.

**10.** Время, за которое автомобиль проедет 40 метров можно найти из уравнения $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$, где $S = 40$ м, $v_0 = 28$ м/с, $a = 8$ м/с$^2$:

$40 = 28t - \dfrac{8t^2}{2}$; $t^2 - 7t + 10 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 5$.

Из рисунка 220 видно, что в момент времени $t = t_0$ автомобиль остановится, значит 40 метров он пройдёт за $t = 2$ с (при $t > t_0$ и $t < 0$ график не имеет физического смысла).

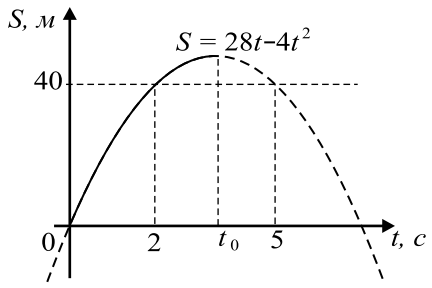


Рис. 220

*Ответ:* 2.

**11.** Объём бассейна примем за 1. Тогда за 1 час две трубы заполнят $\frac{1}{6}$ часть бассейна, первая труба за 1 час заполнит $\frac{1}{10}$ часть бассейна. Значит, вторая труба за 1 час заполнит $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ часть бассейна. Весь бассейн вторая труба заполнит за $1 : \frac{1}{15} = \frac{15}{1} = 15$ часов.

*Ответ:* 15.

**12.** Найдём производную исходной функции: $y' = (0{,}7 - x)' \cos x + (0{,}7 - x)(\cos x)' + (\sin x)' + (2)' = -\cos x + (0{,}7 - x) \cdot (-\sin x) + \cos x = (x - 0{,}7) \sin x$. Найдём нули производной на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, учитывая, что на этом множестве $\sin x > 0$. Имеем $(x - 0{,}7) \sin x = 0$; $x - 0{,}7 = 0$; $x = 0{,}7$. Значение $x = 0{,}7$ принадлежит интервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. При $x \in (0;\ 0{,}7)$ выполняется неравенство $y'(x) < 0$. При $x \in \left(0{,}7;\ \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Отсюда $x = 0{,}7$ является единственной точкой минимума на рассматриваемом интервале (см. рис. 221).

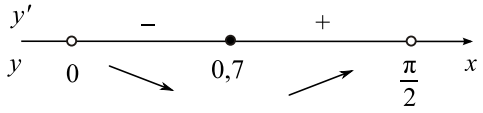


Рис. 221

*Ответ:* 0,7.

**13.** а) Преобразуем уравнение согласно формуле приведения $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$:

$2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.

Обозначим $\sin x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, получим $2t^2 + 7t - 4 = 0$.

$t_1 = \frac{-7 - 9}{2 \cdot 2} = -4$ — не удовлетворяет условию $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

$t_2 = \frac{-7 + 9}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Вернёмся к исходной переменной:

$\sin x = \frac{1}{2}$,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 222). Получаем: $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.

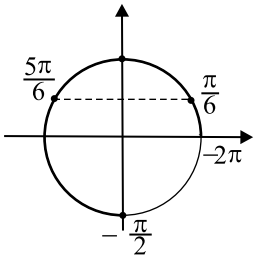


Рис. 222

*Ответ:* а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}$.

**14.** а) Ясно, что $DD_1\perp ABC$, так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма (см. рис. 223). Тогда $BD$ — проекция $BD_1$ на плоскость $ABC$. При этом $BD\perp AC$ по свойству диагоналей ромба. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BD_1\perp AC$, что и требовалось доказать.

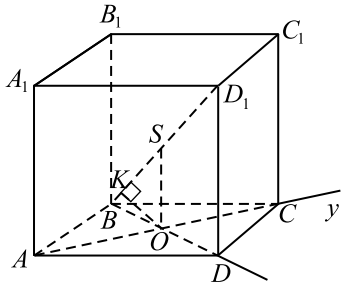


Рис. 223

б) Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей ромба $AC$ и $BD$. В плоскости $BDD_1$ проведём $OK\perp BD_1$, где точка $K$ принадлежит $BD_1$. Но $AC\perp BD$, $AC\perp BD_1$, следовательно, $AC\perp BDD_1$ по признаку перпендикулярнсти прямой и плоскости. Тогда $AC$ перпендикулярна любой прямой в плоскости $BDD_1$. В частности, $AC\perp OK$. Значит, длина отрезка $OK$ равна расстоянию между скрещивающимися прямыми $AC$ и $BD_1$.

В треугольнике $BDD_1$ проведём среднюю линию $OS$. Тогда $OS\parallel AA_1$, значит $OS\parallel DD_1$ и $OS\perp BD$. Также $OS=\frac{1}{2}DD_1=12$. Треугольник $BOS$ прямоугольный, $BO=\frac{1}{2}BD=6$, $S_{BSO}=\frac{1}{2}BO\cdot OS=\frac{1}{2}BS\cdot OK$. Отсюда, $OK=\frac{BO\cdot OS}{BS}=\frac{6\cdot 12}{\sqrt{6^2+12^2}}=\frac{72}{\sqrt{180}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

*Ответ:* $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

**15.** Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 2-2x>0, \\ x>0, \\ \log_{29} 4x^2 - 2\log_{14}(2x) \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2>2x, \\ x>0, \\ \dfrac{\ln(2x)^2}{\ln 29} - \dfrac{2\ln(2x)}{\ln 14} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<1, \\ x>0, \\ \dfrac{2\ln(2x)}{\ln 29} - \dfrac{2\ln(2x)}{\ln 14} \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1, \\ x>0, \\ 2\ln(2x)\Big(\dfrac{1}{\ln 29} - \dfrac{1}{\ln 14}\Big) \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1, \\ x>0, \\ 2x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1, \\ x>0, \\ x \neq \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$x \in \Big(0;\ \frac{1}{2}\Big) \cup \Big(\frac{1}{2};\ 1\Big)$.

Исследуем знак левой части неравенства.

При $0 < x < \frac{1}{2}$:

$\log_{29}(4x^2) - 2\log_{14}(2x) = 2\log_{29}(2x) - 2\log_{14}(2x) =$

$= 2\ln(2x)\Big(\frac{1}{\ln 29} - \frac{1}{\ln 14}\Big) > 0$, так как $0 < \ln 14 < \ln 29$.

$\log_{12}(2-2x) + \log_{18}\Big(\frac{1}{2-2x}\Big) = \log_{12}(2-2x) - \log_{18}(2-2x) =$

$= \ln(2-2x)\Big(\frac{1}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 18}\Big) > 0$, так как $0 < \ln 12 < \ln 18$, а $2-2x > 1$ и значит $\ln(2-2x) > 0$.

При $\frac{1}{2} < x < 1$ :

$\log_{29}(4x^2) - 2\log_{14}(2x) = 2\log_{29}(2x) - 2\log_{14}(2x) =$

$= 2\ln(2x)\Big(\frac{1}{\ln 29} - \frac{1}{\ln 14}\Big) < 0$, так как $0 < \ln 14 < \ln 29$.

$\log_{12}(2-2x) + \log_{18}\Big(\frac{1}{2-2x}\Big) = \log_{12}(2-2x) - \log_{18}(2-2x) =$

$= \ln(2-2x)\Big(\frac{1}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 18}\Big) < 0$, так как $2-2x < 1$, $\ln(2-2x) < 0$ и $\frac{1}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 18} > 0$.

Таким образом, левая часть исходного неравенства положительна и потому не меньше $\log_{36}\frac{1}{4}$ при любом значении $x$ из ОДЗ (так как $\log_{36}\frac{1}{4} < 0$).

Следовательно, решение исходного неравенства: $\Big(0;\ \frac{1}{2}\Big) \cup \Big(\frac{1}{2};\ 1\Big)$.

*Ответ:* $\Big(0;\ \frac{1}{2}\Big) \cup \Big(\frac{1}{2};\ 1\Big)$.

**16.** а) По свойству касательной к окружности $O_1S \perp O_2S$ и $O_1T \perp O_2T$ (см. рис. 224). Тогда прямоугольный $\triangle O_1O_2T$ вписан в некоторую окружность с диаметром $O_1O_2$.

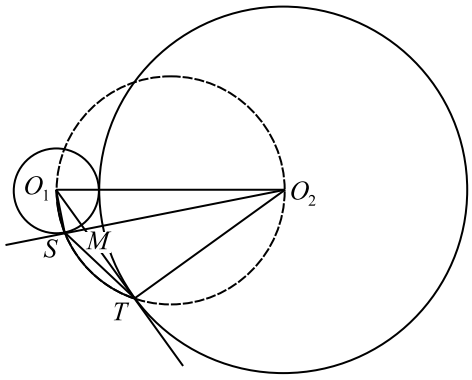


Рис. 224

Аналогично прямоугольный $\triangle O_1O_2S$ вписан в некоторую окружность с тем же диаметром. Следовательно, $\triangle O_1O_2T$ и $\triangle O_1O_2S$ вписаны в одну и ту же окружность, то есть $O_1O_2TS$ вписан в окружность с диаметром $O_1O_2$. Значит, $\angle O_1O_2S$ и $\angle O_1TS$ — вписанные и опираются на одну и ту же дугу $O_1S$. Отсюда $\angle O_1TS = \angle O_1O_2S$.

Кроме того, $\angle SMT = \angle O_1MO_2$ как вертикальные. Тогда $\triangle SMT \sim \triangle O_1MO_2$ по двум углам.

б) Пусть $O_1S$ — радиус меньшей окружности. Обозначим его через $2a$. Следовательно, $O_2T = 5a$. Тогда $O_1O_2 = 2a + 5a = 7a$. Отсюда, из $\triangle O_1SO_2$ по теореме Пифагора $O_2S = \sqrt{(7a)^2 - (2a)^2} = 3\sqrt{5}a$. Из $\triangle O_1TO_2$ по теореме Пифагора $O_1T = \sqrt{(7a)^2 - (5a)^2} = 2\sqrt{6}a$.

$$S_{O_1SO_2} = \frac{1}{2}O_1S \cdot SO_2 = 3\sqrt{5}a^2.$$

$$S_{O_1TO_2} = \frac{1}{2}O_2T \cdot O_1T = 5\sqrt{6}a^2.$$

$$\frac{S_{O_1SO_2}}{S_{O_1TO_2}} = \frac{3\sqrt{5}a^2}{5\sqrt{6}a^2} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

*Ответ:* $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

**17.** Если Егор продаст бумагу по истечении $i$-го года, то через 20 лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(5i + 12) \cdot (1{,}05)^{20-i}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_i = (5i+12) \cdot (1{,}05)^{20-i}$, где $i$ пробегает целые значения от 1 до 20. Попробуем выяснить, при каких $i$ последовательность возрастает, а при каких — убывает.

Рассмотрим приращение: $b_i = a_i - a_{i-1}$.

Найдём $a_{i-1}$.

$a_{i-1} = (5(i-1) + 12) \cdot 1{,}05^{20-(i-1)} = (5i + 7) \cdot 1{,}05^{20-i} \cdot 1{,}05$ $(i \geqslant 1)$,

$b_i = (1{,}05)^{20-i}(5i + 12 - 1{,}05 \cdot (5i + 7)) =$

$= (1{,}05)^{20-i}(5i + 12 - 5{,}25i - 7{,}35) = (1{,}05)^{20-i}(4{,}65 - 0{,}25i).$

Отсюда $b_i > 0$ при $4{,}65 - 0{,}25i > 0$, $i < 18{,}6$, то есть $i \leqslant 18$ (так как $i$ — целое число). С другой стороны, $b_i < 0$ при $i > 18$. Следовательно, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{17} < a_{18} > a_{19} > a_{20}$. Наибольшее значение последовательность $a_i$ принимает при $i = 18$.

*Ответ:* по истечении 18 лет.

**18.** Преобразуем второе уравнение системы, выделив полные квадраты:

$\begin{cases} 15|x-2| + 8|y+3| = 120, \\ x^2 - 4a^2 + 2y + 5 = 4(x-1) - (y+2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 15|x-2| + 8|y+3| = 120, \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = (2a)^2; \end{cases}$

$\begin{cases} 15|x-2| + 8|y+3| = 120, \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = (2a)^2; \end{cases}$

Сделав замену переменных $t = x - 2$ и $w = y + 3$, получим систему:

$\begin{cases} 15|t| + 8|w| = 120, \quad (1) \\ t^2 + w^2 = (2a)^2. \qquad (2) \end{cases}$

При такой замене старая и новая система имеют одинаковое число решений.

Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат $Otw$ (см. рис. 225).

График уравнения (1) — ромб, диагонали которого, равные 16 и 30, лежат соответственно на осях $Ot$ и $Ow$, а графиком уравнения (2) является семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = 2|a|$.

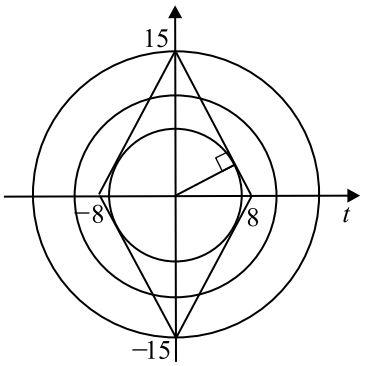


Рис. 225

Графики уравнений системы имеют ровно 4 общие точки, и следовательно система имеет ровно 4 решения тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо её радиус удовлетворяет условию: $8 < r < 15$.

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами 8 и 15, откуда

$$r = 2|a| = \frac{8 \cdot 15}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{120}{17};$$

$|a| = \dfrac{60}{17} = 3\dfrac{9}{17}$, тогда $a = \pm 3\dfrac{9}{17}$.

Во втором случае получаем $8 < 2|a| < 15$, откуда $-7{,}5 < a < -4$ или $4 < a < 7{,}5$.

*Ответ:* $a \in (-7{,}5; -4) \cup \left\{\pm 3\dfrac{9}{17}\right\} \cup (4;\ 7{,}5)$.

**19.** а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не

более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 положительных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх положительных чисел. Значит, положительное число одно, и это число — наибольшее число в наборе, то есть 4. Наименьшее число в наборе является суммой двух отрицательных задуманных чисел. Из отрицательных выписанных чисел только $-2$ и $-7$ дают в сумме $-9$. Значит, были задуманы числа $-9$, $-2$ и 4.

б) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел $-5$, $-3$, 2, 6 и для задуманных чисел 3, 5, $-2$, $-6$ на доске будет выписан набор $-8$, $-6$, $-5$, $-3$, $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8.

в) Если учитель задумал 3 числа ($a$, $b$, $c$), то на доске выписано 7 чисел: сами задуманные числа (3 штуки), суммы по 2 слагаемых — 3 штуки, а также сумма всех чисел. Разобьём выписанные числа на 2 группы.

Группа $A$ — это сами задуманные числа, группа $B$ — это суммы по 2 слагаемых и сумма трёх чисел.

В группе $A$ не больше одной единицы, так как по условию все числа различны.

Рассмотрим группу $B$. Покажем, что в ней не более одной единицы. Предположим противное. Тогда найдётся хотя бы две единицы. В этом случае хотя бы одна единица является суммой некоторых двух задуманных чисел, то есть можно считать, что $a+b=1$. Если $a+b+c=1$, то $c=0$, что противоречит условию. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств: $a+c=1$, $b+c=1$. В первом случае $a+b=a+c=1$, тогда $b=c$. Во втором случае $a=c$. Значит, оба случая противоречат условию и наше предположение не верно. Следовательно, в группе $B$ не более одной единицы.

Таким образом, общее число единиц не превышает $1+1=2$. Приведём пример задуманных чисел, для которых на доске будет выписано ровно 2 единицы. Пусть учитель задумал числа 1, 3, $-2$. Тогда на доске будет выписан набор: $-2$, $-1$, 1, 1, 2, 3, 4.

*Ответ:* а) $-9$, $-2$ и 4; б) нет; в) 2.

## Решение варианта 39

**1.** В подъезде $3 \cdot 12 = 36$ квартир. $114 = 3 \cdot 36 + 6$. Значит, Антон живёт в 4-ом подъезде.

*Ответ:* 4.

**2.** Используя рисунок, определим на оси ординат промежуток от 8 до 4 ампер (ток в цепи электродвигателя уменьшается), ему соответствует промежуток на оси абсцисс от 1 до 2,5 Ом, то есть сопротивление в цепи увеличилось на 1,5 Ома.

*Ответ:* 1,5.

**3.** $\triangle BKC = \triangle MDC = \triangle AFD = \triangle ABE$ (см. рис. 226) по двум катетам, следовательно, $BC = CD = AB = AD$, откуда следует, что $ABCD$ — ромб.

$BK = 6\sqrt{10}$, $KC = 2\sqrt{10}$, $BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{(6\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2} = 20$. Пусть $P_{ABCD}$ — периметр ромба $ABCD$. $P_{ABCD} = 4 \cdot BC = 4 \cdot 20 = 80$.

*Ответ:* 80.

**4.** При контроле качества продукции выявляется 40% дефектных плиток, которые составляют 5% от произведённых плиток, и они не поступают в продажу. Значит, не поступает в

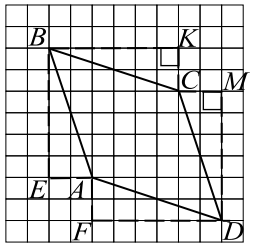


Рис. 226

продажу $0{,}4 \cdot 5\% = 2\%$ от произведённых плиток. Остальная часть произведённых плиток — $100\% - 2\% = 98\%$ поступает в продажу.

Не имеет дефектов $100\% - 5\% = 95\%$ произведённых плиток. Вероятность того, что купленная плитка не имеет дефекта, равна $95\% : 98\% = \dfrac{95}{98} \approx 0{,}97$.

*Ответ:* 0,97.

**5.** $\sin \dfrac{\pi x}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\pi x}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ или $\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\dfrac{\pi x}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \dfrac{x}{4} = -\dfrac{1}{4} + 2k,\ x = -1 + 8k$, наименьший положительный корень данного вида $x = 7$.

$\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{5}{4} + 2n,\ x = 5 + 8n$, наименьший положительный корень данного вида $x = 5$.

Значит, наименьший положительный корень уравнения $x = 5$.

*Ответ:* 5.

**6.** Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle BOA = 56°$. Углы $OBC$ и $OAC$ прямые как углы между касательными и радиусами, проведёнными в точки касания. Сумма углов четырёхугольника равна 360°, можем найти угол $ACB$.

$\angle ACB = 360° - 56° - 90° - 90° = 124°$.

*Ответ:* 124.

**7.** Пусть $x_0$ — абсцисса точки на графике функции $y = 16x^2 + bx + 12$, через которую проходит касательная к этому графику.

Значение производной в точке $x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, то есть $y'(x_0) = 32x_0 + b = -2$. С другой стороны, точка касания принадлежит одновременно и графику функции и касательной, то есть $16x_0^2 + bx_0 + 12 = -2x_0 - 4$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 32x_0 + b = -2, \\ 16x_0^2 + bx_0 + 12 = -2x_0 - 4. \end{cases}$

Решая систему, получим $x_0^2 = 1$, значит либо $x_0 = -1$, либо $x_0 = 1$. Согласно условию абсцисса точки касания больше нуля, поэтому $x_0 = 1$, тогда $b = -2 - 32x_0 = -34$.

*Ответ:* $-34$.

**8.** Рассмотрим рисунок 227. Отрезок $MN$ является средней линией треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $MN = \dfrac{1}{2}B_1C_1 = 2$. Аналогично, $KL = \dfrac{1}{2}BC = 2$. Кроме того,

$MK = NL = 10$. Отсюда следует, что четырёхугольник $MNLK$ является параллелограммом. Так как $MK \| AA_1$, то $MK \perp ABC$ и $MK \perp KL$. Следовательно, четырёхугольник $MNLK$ является прямоугольником. $S_{MNLK} = MK \cdot KL = 10 \cdot 2 = 20$.

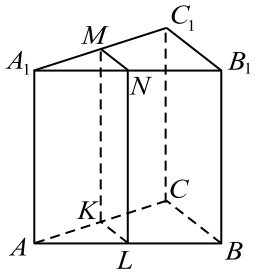


Рис. 227

*Ответ:* 20.

**9.** $6\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha = 7$, $6\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha = 7(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$,

$6\sin^2\alpha - 7\sin^2\alpha = -8\cos^2\alpha + 7\cos^2\alpha$, $-\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha$, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$.

*Ответ:* 1.

**10.** Заметим, что в течение первой секунды, то есть при $0 \leqslant t \leqslant 1$ выполняется неравенство $0 \leqslant \pi t \leqslant \pi$. Из этого неравенства следует, что: $\sin \pi t \geqslant 0$.

Тогда $4\sin \pi t \geqslant 2$, $\sin \pi t \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \pi t \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$ (см. рис. 228), $\dfrac{1}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{5}{6}$. Значит, на первой секунде скорость движения превышала 2 см/с на протяжении $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$ секунды.

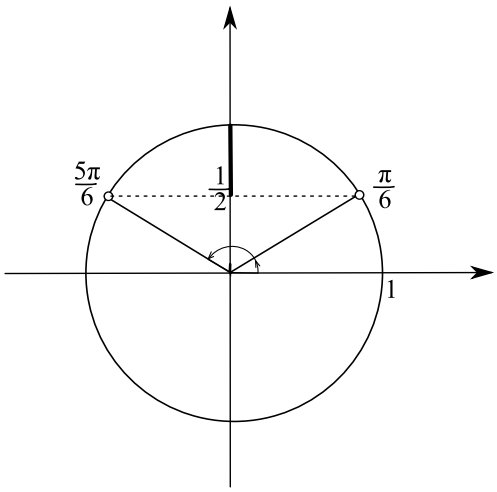


Рис. 228

*Ответ:* 0,67.

**11.** Из условия следует, что количество посаженных кустов роз ежедневно увеличивалось на одно и тоже число. Количество ежедневно посаженных роз образует арифметическую прогрессию, при этом первый член равен 8. По формуле суммы первых членов арифметической прогрессии получаем

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20})}{2} \cdot 20 = 350$, $8 + a_{20} = 35$, $a_{20} = 35 - 8 = 27$. Коля в последний день посадил 27 кустов роз.

*Ответ:* 27.

**12.** Область определения: $102 + 16x - x^2 \geqslant 0$. Найдём производную исходной функции: $y' = \dfrac{(102 + 16x - x^2)'}{2\sqrt{102 + 16x - x^2}} = \dfrac{16 - 2x}{2\sqrt{102 + 16x - x^2}}$. $y' = 0$ при $16 - 2x = 0$, $x = 8$. Заметим, что при $x = 8$ выполняется неравенство $102 + 16 \cdot 8 - 8^2 = 166 > 0$, отсюда $x = 8$ принадлежит ОДЗ и функция дифференцируема в этой точке. При этом для значений $x$, принадлежащих ОДЗ, $y' > 0$ при $x < 8$ и $y' < 0$ при $x > 8$. Таким образом, $x = 8$ — единственная точка максимума рассматриваемой функции.

*Ответ:* 8.

**13.** а) 1. Согласно формуле приведения, $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$. Областью определения уравнения будут такие значения $x$, что $\cos x \neq 0$ и $\operatorname{tg} x \neq -1$. Преобразуем уравнение, пользуясь формулой косинуса двойного угла $2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$. Получим уравнение:

$5(1 + \cos x) = \dfrac{11 + 5\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

Заметим, что $\dfrac{11 + 5\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \dfrac{5(1 + \operatorname{tg} x) + 6}{1 + \operatorname{tg} x} = 5 + \dfrac{6}{1 + \operatorname{tg} x}$, поэтому уравнение принимает вид: $5 + 5\cos x = 5 + \dfrac{6}{1 + \operatorname{tg} x}$. Отсюда $\cos x = \dfrac{\frac{6}{5}}{1 + \operatorname{tg} x}$, $\cos x + \sin x = \dfrac{6}{5}$.

2. Преобразуем $\sin x + \cos x$ по формуле приведения и формуле суммы косинусов: $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos x + \sin x = \cos x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{6}{5}$. Отсюда $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. Значит, $x - \dfrac{\pi}{4} = \arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5} + 2\pi k$, $k \in Z$,

или $x - \dfrac{\pi}{4} = -\arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5} + 2\pi t$, $t \in Z$.

Поэтому $x = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5} + 2\pi k$, $k \in Z$,

или $x = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5} + 2\pi t$, $t \in Z$.

Найденные значения $x$ принадлежат области определения.

б) Выясним сначала куда попадают корни уравнения при $k = 0$ и $t = 0$. Это будут соответственно числа $a = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ и $b = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

1. Докажем вспомогательное неравенство:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{5} < 1 \ (1).$$

Действительно, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{10} < \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

Заметим также, что $\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{18}{25} < 1^2 = 1$, значит $\frac{3\sqrt{2}}{5} < 1$.

2. Из неравенств (1) по свойству арккосинуса получаем:

$\arccos 1 < \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < \frac{\pi}{4}$.

Отсюда $\frac{\pi}{4} + 0 < \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$,

$0 < \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < \frac{\pi}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично, $-\frac{\pi}{4} < -\arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < 0$,

$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$,

$0 < b < \frac{\pi}{2}$.

При $k = -1$ и $t = -1$ получаем корни уравнения $a - 2\pi$ и $b - 2\pi$. $\left(a-2\pi = -\frac{7}{4}\pi + \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5}, b-2\pi = -\frac{7}{4}\pi - \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$. При этом $-2\pi < a-2\pi < -\frac{3\pi}{2}$, $-2\pi < b - 2\pi < -\frac{3\pi}{2}$. Значит, эти корни принадлежат заданному промежутку $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$.

При остальных значениях $k$ и $t$ корни уравнения не принадлежат заданному промежутку.

Действительно, если $k \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$, то корни больше $2\pi$. Если $k \leqslant -2$ и $t \leqslant -2$, то корни меньше $-\frac{7\pi}{2}$.

*Ответ:* а) $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4} \pm \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

**14.** а) Впишем в заданный трёхгранный угол единичный куб $ABCOA_1B_1C_1O_1$ (см. рис. 229).

Тогда $OA_1$, $OC_1$ и $OB$ являются биссектрисами плоских углов заданного трёхгранного угла.

В треугольнике $A_1OC_1$ все стороны $A_1O$, $OC_1$, $A_1C_1$ являются диагоналями квадратов со стороной, равной 1. Поэтому их длины равны $\sqrt{2}$. Треугольник $A_1OC_1$ — равносто-

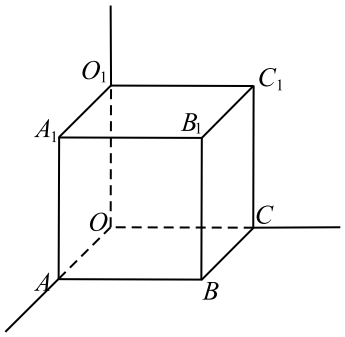


Рис. 229

ронний, поэтому любой его внутренний угол равен 60°. В частности, угол $A_1OC_1$ между диагоналями $A_1O$ и $OC_1$ равен 60°. Аналогично доказывается, что любой другой угол между биссектрисами равен 60°. Что и требовалось доказать.

б) 1. По условию шар вписан в трёхгранный угол у которого все плоские углы равны по 60°. Тогда можно считать, что этот шар вписан в правильный тетраэдр $QMNP$ (см. рис. 230), где $Q$ — его вершина, а $QM$, $QP$ и $QN$ — боковые рёбра, $QH$ — высота, $r$ — радиус вписанного в тетраэдр шара.

2. Известно, что центр шара, вписанного в этот тетраэдр, лежит на высоте тетраэдра.

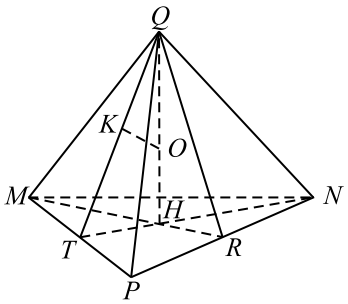


Рис. 230

3. Пусть точка $O$ является центром шара вписанного в тетраэдр ($O$ принадлежит высоте $QH$). Тогда $OH$ является радиусом вписанного шара $OH = r$ ($H$ — центр $\triangle MPN$).

Опустим из точки $O$ перпендикуляр $OK$ на биссектрису $QT$ угла $MQP$. $\triangle MQP$ правильный, значит $QT$ — высота и медиана. Аналогично, $NT$ — высота, медиана и биссектриса правильного $\triangle MNP$

Тогда $MT \perp TQ$ и $MT \perp TN$, поэтому $MT \perp QTN$. Тогда $MT \perp OK$. Итак $OK \perp MT$ и $OK \perp TQ$, поэтому $OK \perp MPQ$. Следовательно, $OK$ — радиус вписанного шара, $OK = r$.

Так как $H$ является точкой пересечения медиан треугольника основания $MNP$, то $TH = \frac{1}{3}TN$.

Но $TN = TQ$, (как медианы равных треугольников), поэтому $TH = \frac{1}{3}TQ$, $\frac{TQ}{TH} = 3$.

4. Треугольники $TQH$ и $OKQ$ подобны по двум углам. Поэтому $\frac{QT}{TH} = \frac{OQ}{OK}$, $3 = \frac{OQ}{r}$, $OQ = 3r$.

По условию $V_{\text{шара}} = 1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Отсюда $r^3 = \frac{3}{4\pi}$, $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$. $OQ = 3r = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$.

*Ответ:* $\sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$.

**15.** 1. Заметим, что $x = 0$ решением системы не является, так как второе неравенство системы при $x = 0$ не является верным ($6 \leqslant 0$). Пусть $x > 0$.

Вычитая из первого неравенства второе, получаем

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 \geqslant 0.$$

А вычитая из второго неравенства системы последнее неравенство, получаем

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x \leqslant 0,\ x(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \leqslant 0.$$

Так как $x > 0$, то из последнего неравенства получаем:

$$x^3 - 5x^2 + 5x + 3 \leqslant 0.$$

Таким образом система неравенств

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + x + 6 \geqslant 0, \\ x^3 - 5x^2 + 5x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

является *следствием* исходной.

Вычитая из первого неравенства последней системы второе, умноженное на 2, и деля полученное неравенство на $-x$ (причём снова обращаем внимание на известное нам ограничение $x > 0$), получаем

$$x^2 - 6x + 9 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство (*следствие* исходной системы) имеет единственное решение $x = 3$. Простой подстановкой убеждаемся, что $x = 3$ является решением системы.

*Ответ:* 3.

**16.** а) 1. Опишем окружность около треугольника $ADC$. Так как $\angle ADC = 120°$, то он опирается на дугу этой окружности, градусная мера которой равна 240°.

Пусть точка $M$ является серединой этой дуги, тогда все дуги $AC$, $AM$ и $CM$ имеют градусную меру 120°. Поэтому треугольник $AMC$ является равносторонним, длина каждой его стороны равна длине $AC$. Значит, точка $M$ совпадает с точкой $B$ треугольника $ABC$.

Получаем, что указанная окружность описана около треугольника $ABC$. Её центр $O$ является точкой пересечения биссектрис (высот и медиан). Поэтому отрезок, проведённый из точки $A$ к точке пересечения высот треугольника совпадает с отрезком $AO$, где $AO$ — радиус описанной окружности. По условию $l \perp OA$ (см. рис. 231).

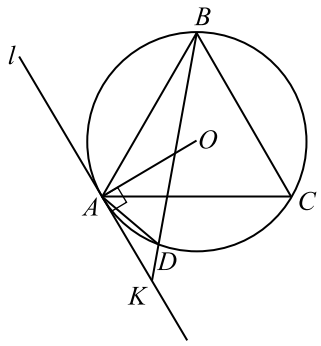


Рис. 231

Так как $l \perp AO$, то $l$ перпендикулярна радиусу, поэтому $l$ является касательной к окружности. По свойству касательной и секущей, проведённых к окружности из одной точки $K$ получаем: $AK^2 = KB \cdot KD$. Но $AK = 1$, значит $1 = KB \cdot KD$. Что и требовалось доказать.

б) 1. На рисунке 231 $\angle KAB = \angle KAO + \angle OAB$. $\angle KAO = 90^\circ$ по условию, $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$, так как $AO$ — биссектриса $\angle CAB$. Но $\angle CAB = 60^\circ$, значит, $\angle OAB = 30^\circ$, а $\angle KAB = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

2. По теореме косинусов для $\triangle ABK$ получаем:

$BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cdot \cos 120^\circ = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, так как $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

$BK = \sqrt{7}$.

В пункте а) установлено, что $BK \cdot KD = 1$, поэтому $KD = \frac{1}{BK} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Отсюда $BD = BK - KD = \sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}}$.

Заметим, что $\angle ADB = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$ (применили теорему о вписанном угле).

3. Обозначим $AD = x$.

По теореме косинусов для треугольника $ADB$ получаем:
$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB$,

$4 = x^2 + \frac{36}{7} - 2 \cdot x \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot \cos 60^\circ$,

$4 = x^2 + \frac{36}{7} - 2 \cdot x \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2}$,

$x^2 - \frac{6}{\sqrt{7}}x + \frac{8}{7} = 0$.

По теореме Виета $x_1 = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{7}}$.

По свойству треугольника $DK + AK > AD$, поэтому $\frac{1}{\sqrt{7}} + 1 > AD$.

Если $AD = \frac{4}{\sqrt{7}}$, то должно выполняться $\frac{1}{\sqrt{7}} + 1 > \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{3}{\sqrt{7}} < 1, 3 < \sqrt{7}$, что не верно.

Следовательно, $AD = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

*Ответ:* б) $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

**17.** 1. Пусть $x$ км/ч — скорость «быстрой» лодки, тогда $(x-3)$ км/ч — скорость «медленной» лодки. Обозначим через $t$ время движения лодок от начала движения до поворота (в часах).

2. Найдём время, затраченное «быстрой» лодкой на весь путь. Так как эта лодка сначала шла $t$ часов против течения, то она прошла расстояние $(x-2)\cdot t$ км. На обратный путь уже по течению она затратила время $\frac{(x-2)t}{x+2}$ часов.

3 Аналогично, согласно условию, медленная лодка шла против течения $t$ часов со скоростью $((x-3)-2) = (x-5)$ км/ч и прошла расстояние $(x-5)\cdot t$ км. При этом $x - 5 > 0$.

На обратный путь эта лодка затратила время $\frac{(x-5)\cdot t}{(x-3)+2} = \frac{(x-5)\cdot t}{x-1}$ часов, так как шла по течению.

4. Согласно условию время движения «быстрой» лодки не менее, чем на $\frac{1}{15}t$ больше времени движения «медленной» лодки. Поэтому справедливо неравенство

$$\frac{(x-2)t}{x+2} - \frac{(x-5)t}{x-1} \geqslant \frac{1}{15}t, (t > 0).$$

$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{x-5}{x-1} - \frac{1}{15} \geqslant 0, (x+2>0, x-1>0)$$
$$15(x-2)(x-1) - 15(x-5)(x+2) - (x+2)(x-1) \geqslant 0,$$
$$15x^2 - 45x + 30 - 15x^2 + 45x + 150 - x^2 - x + 2 \geqslant 0,$$
$$-x^2 - x + 182 \geqslant 0,$$
$$x^2 + x - 182 \leqslant 0.$$

5. Решаем неравенство графически. Находим корни трёхчлена $x^2 + x - 182$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 182}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-1 \pm 27}{2}$$

$x_1 = -14$, $x_2 = 13$.

Ветви параболы $y = x^2 + x - 182$ направлены вверх, эскиз графика имеет вид, изображённый на рисунке 232.

Неравенство выполнено, если $-14 \leqslant x \leqslant 13$.

С учётом ограничения $x > 5$ получим, что наибольшим целым значением $x$, удовлетворяющим неравенству будет $x = 13$.

*Ответ:* 13.

**18.** 1. Учитывая, что $f'(x) = 2x - 6$, выпишем уравнение касательной, проходящей через некоторую точку графика $(x_0, y_0)$ рассматриваемой функции (см. рис. 233; удобно обозначить $a = x_0$).

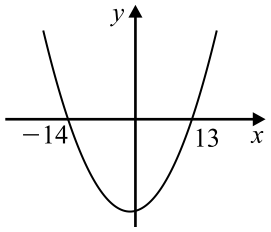


Рис. 232

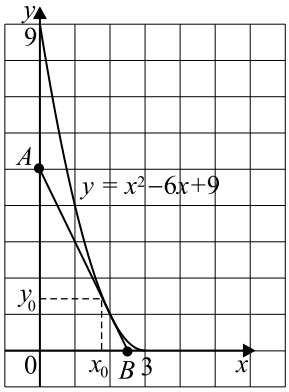


Рис. 233

Уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,;$$
$$y = x_0^2 - 6x_0 + 9 + (2x_0 - 6)(x - x_0)\,;$$
$$y = (2x_0 - 6)x + (9 - x_0^2)\,.$$

Отсюда, полагая $x = 0$, а затем $y = 0$, получаем координаты точек пересечения с осями:

$$A\,(0,\ 9 - x_0^2) \quad \text{и} \quad B\left(\frac{9 - x_0^2}{6 - 2x_0},\ 0\right), \quad \text{т.е.} \quad B\left(\frac{3 + x_0}{2},\ 0\right).$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OB \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + x_0}{2} \cdot (9 - x_0^2) = \frac{(3 - x_0)(3 + x_0)^2}{4}\,.$$

2. Находим теперь с помощью производной максимальное значение функции

$$g(a) = (3 - a)(3 + a)^2\,,\ a \in (0, 3).$$

Производная равна

$$g'(a) = -(3 + a)^2 + 2(3 - a)(3 + a) = 3(3 + a)(1 - a)\,,$$

откуда $g'(a) = 0$ при $a = 1$, так как $a \neq -3$. Убедимся, что точка $a = 1$ на $(0, 3)$ является точкой максимума функции $g(a)$.

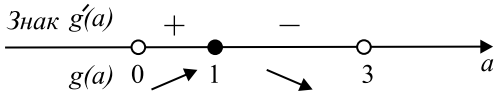


Рис. 234

Максимальная площадь равна $\dfrac{(3 - 1)(3 + 1)^2}{4} = 8$.

*Ответ:* $1; 8$.

**19.** а) Столбцами «хорошей» таблицы размера $2 \times 3$ могут являться только следующие столбцы, содержащие два элемента: $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$, $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$.

Так как в «хорошей» таблице нет одинаковых столбцов, то все три указанные столбца должны быть в таблице. Это означает, что все таблицы размера $2 \times 3$ получаются перестановкой вышеуказанных столбцов, поэтому эквивалентны между собой. Тем самым, количество неэквивалентных таблиц равно 1.

б) 1. В двоичной системе счисления цифрами являются 0 и 1. Число 110 в двоичной системе равно числу $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$ в десятичной системе. Аналогично, число 101 в двоичной системе равно числу 5 в десятичной системе, а число 011 в двоичной системе равно числу 3 в десятичной системе.

Тем самым строкам заданной таблицы соответствуют числа 6, 5 и 3 в десятичной системе. Учитывая, что в каждом столбце также две цифры 1 и одна цифра 0, столбцам таблицы также соответствуют числа 6, 5 и 3 в десятичной системе (цифры столбцов рассматриваем сверху вниз).

2. Любой таблице, полученной из заданной перестановкой строк будет соответствовать некоторая упорядоченная последовательность чисел 6, 5 и 3.

Число таких последовательностей равно числу перестановок из трёх элементов и равно числу $3! = 6$. Тем самым можно построить 6 различных таблиц переставляя строки заданной таблицы.

3. Заметим также, что любой последовательности чисел 6, 5 и 3, соответствующей строкам таблицы будет однозначно соответствовать последовательность таких же чисел, соответствующая столбцам этой таблицы и наоборот. То есть, по сути, каждая перестановка двух столбцов может быть заменена некоторой перестановкой строк. Отсюда следует, что существует ровно 6 различных таблиц эквивалентных заданной таблице.

в) 1) В таблице, содержащей $M$ строк, каждый столбец содержит $M$ элементов, являющихся 1 или 0. Так как на каждое место строки из $M$ элементов может стоять либо 0, либо 1, то есть 2 возможности, то количество таких возможных столбцов равно $2^M$. Так как нулевой столбец не может быть столбцом «хорошей» таблицы, то максимальное число различных ненулевых столбцов равно $2^M - 1$.

2) При $M = 3$ максимальное число столбцов равно $2^M - 1 = 2^3 - 1 = 7$.

Запишем таблицу, указанную в условии задачи, так, что первому столбцу соответствует число 7, второму столбцу соответствует число 6, и так далее седьмому столбцу соответствует число 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

*Ответ:* а) 1; б) 6; в) 1) $2^M - 1$; 2)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

.

## Решение варианта 40

**1.** В подъезде $3 \cdot 16 = 48$ квартир. $151 = 3 \cdot 48 + 7$. Значит, Фёдор живёт в 4-ом подъезде.

*Ответ:* 4.

**2.** Используя рисунок, определим на оси ординат промежуток от 6 до 2 ампер (ток в цепи электродвигателя уменьшается), ему соответствует промежуток на оси абсцисс от 1 до 2 Ом, то есть сопротивление в цепи увеличивается на $2 - 1 = 1$ (Ом).

*Ответ:* 1.

**3.** $\triangle BKC = \triangle CHD = \triangle AFD = \triangle ABE$ (см. рис. 235) по двум катетам, следовательно, $BC = CD = AB = AD$, откуда следует, что $ABCD$ — ромб.

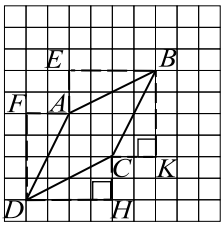


Рис. 235

$BK = 4\sqrt{5}$, $KC = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 10$. Пусть $P_{ABCD}$ — периметр ромба $ABCD$. $P_{ABCD} = 4 \cdot BC = 4 \cdot 10 = 40$.

*Ответ:* 40.

**4.** При контроле качества продукции выявляется $80\%$ дефектных плиток, которые составляют $15\%$ от произведённых плиток, и они не поступают в продажу. Значит, не поступает в продажу $0{,}8 \cdot 15\% = 12\%$ от произведённых плиток. Остальная часть произведённых плиток — $100\% - 12\% = 88\%$ поступает в продажу.

Не имеет дефектов $100\% - 15\% = 85\%$ произведённых плиток. Вероятность того, что купленная плитка не имеет дефекта, равна $85\% : 88\% = \dfrac{85}{88} \approx 0{,}97$.

*Ответ:* 0,97.

**5.** $\sin \dfrac{\pi x}{12} = 0{,}5$, $\dfrac{\pi x}{12} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ или $\dfrac{\pi x}{12} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\dfrac{\pi x}{12} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\dfrac{x}{12} = \dfrac{1}{6} + 2k$, $x = 2 + 24k$, наибольший отрицательный корень данного вида $x = 2 - 24 = -22$.

$\dfrac{\pi x}{12} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\dfrac{x}{12} = \dfrac{5}{6} + 2k$, $x = 10 + 24k$, наибольший отрицательный корень данного вида $x = 10 - 24 = -14$.

Значит, наибольший отрицательный корень уравнения $x = -14$.

*Ответ:* $-14$.

**6.** Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle BOA = 48^\circ$. Углы $OBC$ и $OAC$ прямые как углы между касательными и радиусами, проведёнными в точки касания. Сумма углов четырёхугольника равна $360^\circ$, можем найти

угол $ACB$.
$\angle ACB = 360^\circ - 48^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 132^\circ$.

*Ответ:* 132.

**7.** Пусть $x_0$ — абсцисса точки на графике функции $y = -12x^2 + bx - 10$, через которую проходит касательная к этому графику.

Значение производной в точке $x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, то есть $y'(x_0) = -24x_0 + b = 3$. С другой стороны, точка касания принадлежит одновременно и графику функции и касательной, то есть $-12x_0^2 + bx_0 - 10 = 3x_0 + 2$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} -24x_0 + b = 3, \\ -12x_0^2 + bx_0 - 10 = 3x_0 + 2. \end{cases}$

Решая эту систему, получим $x_0^2 = 1$, значит либо $x_0 = -1$, либо $x_0 = 1$. Согласно условию абсцисса точки касания меньше нуля, поэтому $x_0 = -1$, тогда $b = 3 + 24x_0 = -21$.

*Ответ:* $-21$.

**8.** Прямая $AB$ параллельна плоскости $DD_1C_1C$. Тогда плоскость, проходящая через неё, пересекает плоскость $DD_1C_1C$ по прямой, параллельной $AB$. Такой прямой будет прямая $D_1C_1$. Значит, в сечении получается параллелограмм $ABC_1D_1$. Так как $AB \perp BB_1C_1C$, то $AB \perp BC_1$, поэтому параллелограмм $ABC_1D_1$ является прямоугольником. $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1$. Найдём $BC_1$ по теореме Пифагора: $BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, $BC_1 = 10$ (см. рис. 236). Отсюда, $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1 = 4 \cdot 10 = 40$.

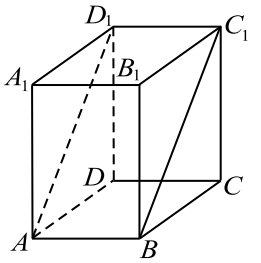


Рис. 236

*Ответ:* 40.

**9.** $3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha = 5$, $3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha = 5(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$,

$3\sin^2\alpha - 5\sin^2\alpha = 5\cos^2\alpha - 7\cos^2\alpha$, $-2\sin^2\alpha = -2\cos^2\alpha$, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{-2}{-2}$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$.

*Ответ:* 1.

**10.** Заметим, что в течение первой секунды, то есть при $0 \leqslant t \leqslant 1$ выполняется неравенство $0 \leqslant \pi t \leqslant \pi$. Из этого неравенства следует, что $\sin \pi t \geqslant 0$;

Тогда $6\sin \pi t \geqslant 3$, $\sin \pi t \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \pi t \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$ (см. рис. 237), $\dfrac{1}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{5}{6}$. Значит, на первой секунде скорость движения превышала 3 см/с на протяжении $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$ секунды.

*Ответ:* 0,67.

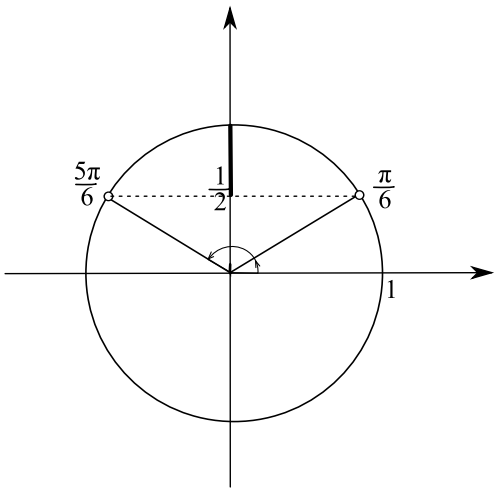


Рис. 237

**11.** Из условия следует, что количество бумажных «журавликов» ежедневно увеличивалось на одно и тоже число. Количество ежедневно сделанных бумажных «журавликов» образует арифметическую прогрессию, при этом первый член прогрессии равен 6. По формуле суммы первых членов арифметической прогрессии имеем

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})}{2} \cdot 15 = 300,$$

$$6 + a_{15} = 40,\ a_{15} = 40 - 6 = 34.$$

Наташа в последний день изготовила 34 бумажных «журавлика».

*Ответ:* 34.

**12.** Область определения: $x^2 + 60x + 1000 \geqslant 0$;
$x^2 + 2 \cdot 30x + 30^2 + (1000 - 30^2) = (x + 30)^2 + 100 > 0$ для всех вещественных значений $x$. Заметим, что функция $y = \sqrt{t}$ строго возрастает на множестве $t \geqslant 0$. Отсюда точка минимума исходной функции совпадёт с точкой минимума $x_0$ функции $x^2 + 60x + 1000$. Точка минимума квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом совпадает с абсциссой вершины соответствующей параболы. Вершина параболы имеет абсциссу

$$x_0 = -\frac{60}{2 \cdot 1} = -30.$$

*Ответ:* $-30$.

**13.** а) 1. Областью определения уравнения будут такие значения $x$, что $\sin x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq \pm 1$. Преобразуем уравнение, пользуясь формулой синуса двойного угла: $2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4} = \sin\frac{x}{2}$; $4\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$. Отсюда $3\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4} = \frac{3}{4}\sin x$ и заданное уравнение принимает вид: $\frac{3}{4}\sin x = \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$.
Применяем теперь формулу разности квадратов и сокращаем числитель и знаменатель дроби $\frac{1 - \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$ на $1 - \operatorname{ctg} x$. Получим уравнение:

$\sin x = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{1+\operatorname{ctg} x}$; $\sin x + \cos x = \dfrac{4}{3}$.

2. Применяем формулу приведения и формулу суммы косинусов: $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;

$\cos x + \sin x = \cos x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{3}$. Отсюда

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Значит, $x - \dfrac{\pi}{4} = \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$,

или $x - \dfrac{\pi}{4} = -\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 2\pi t$, $t \in Z$.

Поэтому, $x = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$,

или $x = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 2\pi t$, $t \in Z$.

Найденные значения $x$ принадлежат области определения.

б) 1. Выясним сначала, куда попадают корни уравнения при $k = 0$ и $t = 0$. Это будут соответственно числа $a = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $b = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Докажем вспомогательное неравенство:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1 \quad (1).$$

Действительно, справедливы следующие неравенства: $\sqrt{2} < 1{,}5$; $2\sqrt{2} < 3$; $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < 1$.

Заметим также, что $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2} > 0$, значит $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Из неравенств (1) по свойству арккосинуса получаем:

$\arccos 1 < \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < \dfrac{\pi}{4}$.

Отсюда $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}$,

$0 < \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Аналогично, $-\dfrac{\pi}{4} < -\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < 0$,

$0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$,

$0 < b < \dfrac{\pi}{2}$.

При $k = -1$ и $t = -1$ получаем корни уравнения $a - 2\pi$ и $b - 2\pi$.

$\left(a-2\pi=-\frac{7\pi}{4}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3},\ b-2\pi=-\frac{7\pi}{4}-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

При этом $-2\pi<a-2\pi<-\frac{3\pi}{2}$, $-2\pi<b-2\pi<-\frac{3\pi}{2}$.

Значит эти корни принадлежат заданному промежутку $\left(-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)$.

При остальных значениях $k$ и $t$ корни уравнения не принадлежат заданному промежутку. Действительно, при $k\leqslant -2$ и $t\leqslant -2$ оба корня меньше $-\frac{7\pi}{2}$, а при $k\geqslant 1$ и $t\geqslant 1$ оба корня больше $2\pi$.

*Ответ:* а) $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4}\pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**14.** а) Все три стороны треугольника $AB_1C$ равны $\sqrt{2}$, так как являются диагоналями квадрата со стороной 1 (см. рис. 238)

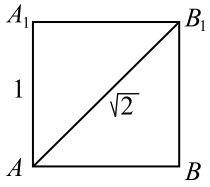


Рис. 238

Площадь $S$ треугольника, радиус $r$ вписанной окружности и полупериметр $p$ связаны соотношением: $S=p\cdot r$. Отсюда $r=\frac{S}{p}$.

$S_{AB_1C}=\frac{1}{2}AB_1\cdot B_1C\cdot\sin\angle AB_1C=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $r=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, что и требовалось доказать.

б) 1. По условию шар меньшего радиуса вписан в трёхгранный угол, образованный биссектрисами $AB_1$, $AD_1$ и $AC$ плоских углов, выходящих из точки $A$.

Угол между $AB_1$ и $AC$ равен $60^\circ$, так как $AB_1$ и $AC$ стороны равностороннего треугольника $AB_1C$. Аналогично по $60^\circ$ равны углы между биссектрисами $AB_1$ и $AD_1$, $AD_1$ и $AC$.

Таким образом, шар меньшего радиуса вписан в правильный тетраэдр $APNM$ (см. рис. 239), где точки $P$, $N$ и $M$ лежат на прямых $AB_1$, $AD_1$ и $AC$.

Высота $AH$ пирамиды, проектируется в точку $H$ пересечения медиан, биссектрис и высот равностороннего треугольника $PMN$.

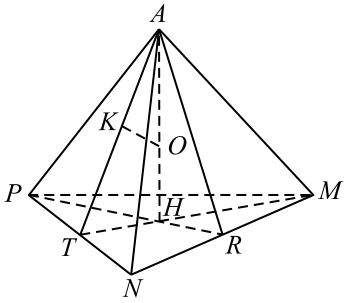


Рис. 239

Пусть $AR$ и $AT$ — высоты боковых граней $ANM$ и $APN$, соответственно. Тогда $AR$ и $AT$ также являются биссектрисами боковых граней $ANM$ и $APN$ соответственно.

По свойству медиан в $\triangle PNM$ получим, что $TH = \frac{1}{3}TM = \frac{1}{3}TA$ (так как $AT = TM$), $TA = 3TH$, $\frac{AT}{TH} = 3$.

2. Обозначим центр $O$ вписанного шара меньшего радиуса через $r$. Тогда $O$ лежит на высоте $AH$.

Так как $OH \perp PNM$, то $OH = r$.

Опустим перпендикуляр $OK$ из точки $O$ на $AT$. Тогда $OK \perp PNA$. Действительно, $OK \perp TA$ по построению. Кроме того, $PT \perp TA$ и $PT \perp TM$. Следовательно, $PT \perp ATM$, откуда $PT \perp OK$, значит, $OK \perp PNA$.

Отсюда следует, что точка $K$ является точкой касания шара с боковой гранью $APN$ и $OK$ является радиусом шара меньшего радиуса, поэтому $OK = r$. Покажем, что $AO = 3r$. Действительно, $\triangle HTA \sim \triangle OKA$ (по двум углам $\angle A$ — общий, $\angle AHT = \angle AKO = 90^\circ$). Отсюда $\frac{AT}{TH} = \frac{AO}{OK}$. Ранее показано, что $\frac{AT}{TH} = 3$, значит, $\frac{AO}{OK} = 3$ и $AO = 3OK = 3r$.

Так как по условию $AO = \sqrt{3}$, то $OH = r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Центр $O_1$ шара большего радиуса $R$, вписанного в трёхгранный угол, будет также лежать на продолжении высоты $AH$. Этот шар будет касаться грани $PMN$ в точке $H$ (см. рис. 240).

Точно так же, как и выше убеждаемся, что $AO_1 = 3R$. Но $AO_1 = AO + OH + HO_1 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + R$. Отсюда $\frac{4\sqrt{3}}{3} + R = 3R$; $\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2R$.

$R = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}$.

*Ответ:* $\frac{32\pi\sqrt{3}}{27}$.

**15.** 1. Заметим, что $x = 0$ решением системы не является, так как второе неравенство системы при $x = 0$ не является верным ($10 \leqslant 0$). Пусть $x > 0$.

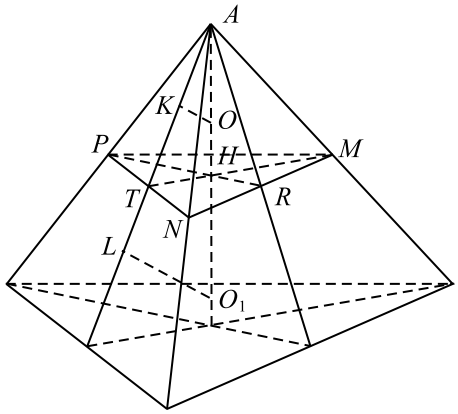


Рис. 240

Вычитая из первого неравенства второе, получаем

$$20x^3 - 30x^2 - 70x + 100 \geqslant 0,$$

то есть

$$2x^3 - 3x^2 - 7x + 10 \geqslant 0.$$

А вычитая из него же второе неравенство системы, умноженное на 11 (это число получается как отношение свободных членов левых частей), получаем

$$-100x^4 + 250x^3 + 50x^2 - 300x \geqslant 0;$$

$$-50x(2x^3 - 5x^2 - x + 6) \geqslant 0.$$

Пользуясь тем, что $x > 0$, из последнего неравенства получаем:

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 \leqslant 0.$$

Система неравенств

$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 7x + 10 & \geqslant & 0, \\ 2x^3 - 5x^2 - x + 6 & \leqslant & 0 \end{cases}$$

является *следствием* исходной. Вычитая из первого неравенства, умноженного на 3, второе, умноженное на 5, и деля полученное неравенство на $-4x$ (причём снова обращаем внимание на известное нам ограничение $x > 0$), получаем

$$x^2 - 4x + 4 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство (*следствие* исходной системы) имеет единственное решение $x = 2$. Простой подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ является решением системы.

*Ответ:* 2.

**16.** а) По признаку вписанного четырёхугольника выпуклый четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 241) вписан в окружность ($\angle ABC + \angle ADC = 180°$).

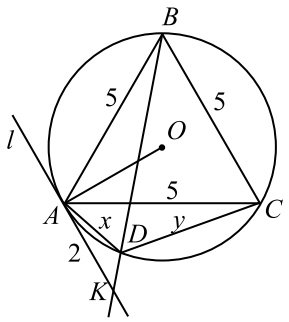


Рис. 241

2. Обозначим $AD = x$, $CD = y$, $BD = z$. Рассмотрим треугольники $ADB$ и $CDB$; $\angle ADB = \angle ACB = \angle BAC = \angle BDC = 60°$. $\cos\angle ADB = \cos\angle BDC = \dfrac{1}{2}$. Учитывая последний факт, запишем для каждого из треугольников $ADB$ и $CDB$ теорему косинусов:

$$25 = x^2 + z^2 - xz \quad \text{и} \quad 25 = y^2 + z^2 - yz.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$x^2 - y^2 - z(x - y) = 0, \quad \text{или} \quad (x - y)(x + y) = z(x - y).$$

3. Если $x \neq y$, то разделим обе части последнего равенства на $x - y$, получаем искомое равенство $AD + CD = BD$.

Если же $x = y$, то угол $ABD = 30°$, а $BAD = 90°$, поэтому $DA = \dfrac{1}{2}DB$ (как катет, лежащий против угла в 30°); аналогично $DC = \dfrac{1}{2}DB$, откуда также следует, что $AD + DC = BD$. Что и требовалось доказать.

б) 1. По теореме о квадрате длины отрезка касательной получаем, что

$$BK \cdot DK = AK^2 = 4, \quad KD = \frac{4}{BK}.$$

2. Для точки $O$ — центра описанной окружности треугольника $\triangle ABC$ — имеем $\angle OAB = 30°$, поэтому $KAB = 120°$; отсюда по теореме косинусов для треугольника $KAB$ получаем $BK^2 = AK^2 + AB^2 - 2 \cdot AK \cdot AB \cdot \cos 120°$; $BK^2 = 4 + 25 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 39$, так как $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $BK = \sqrt{39}$. Отсюда

$$KD = \frac{4}{\sqrt{39}} \quad \text{и} \quad BD = BK - KD = \sqrt{39} - \frac{4}{\sqrt{39}} = \frac{35}{\sqrt{39}}.$$

3. Запишем теорему косинусов для треугольника $ADC$, используя ранее введённые обозначения $AD = x$ и $CD = y$: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos 120°$;

$25 = x^2 + y^2 - 2xy\left(-\frac{1}{2}\right)$;

$x^2 + y^2 + xy = 25$.

Согласно доказанному выше, в пункте а) $x + y = BD$, тогда $x + y = \frac{35}{\sqrt{39}}$, отсюда

$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{1225}{39}$.

Поэтому

$$AD \cdot CD = xy = (x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 + xy) = \frac{1225}{39} - 25 = \frac{250}{39}.$$

*Ответ:* $\frac{250}{39}$.

**17.** 1. Пусть $x$ км/ч — собственная скорость «быстрой» лодки, тогда $(x - 3)$ км/ч — собственная скорость «медленной» лодки. Обозначим через $t$ ч. время движения лодок от начала движения до поворота.

2. Найдём время движения «быстрой» лодкой, затраченное на весь путь. Так как эта лодка сначала шла $t$ часов по течению, то она прошла расстояние $(x + 2) \cdot t$ км. На обратный путь уже по течению она затратила время $\frac{(x+2)t}{x-2}$, так как шла против течения $(x > 2)$.

3 Медленная лодка шла по течению $t$ часов со скоростью $((x - 3) + 2)$ км/ч, поэтому прошла $(x - 1) \cdot t$ км.

На обратный путь эта лодка затратила время $\frac{(x-1)\cdot t}{(x-3)-2} = \frac{(x-1)\cdot t}{x-5}$ часов, $x > 5$.

4. Согласно условию время «медленной» лодки не менее, чем на $\frac{4}{5}t$ больше времени «быстрой» лодки. Поэтому справедливо неравенство

$\frac{(x-1)t}{x-5} - \frac{(x+2)t}{x-2} \geqslant \frac{4}{5}t, (t > 0)$,

$\frac{x-1}{x-5} - \frac{x+2}{x-2} - \frac{4}{5} \geqslant 0, (x - 5 > 0, x - 2 > 0)$,

$5(x - 1)(x - 2) - 5(x + 2)(x - 5) - 4(x - 5)(x - 2) \geqslant 0$,

$5x^2 - 15x + 10 - 5x^2 + 15x + 50 - 4x^2 + 28x - 40 \geqslant 0$,

$-4x^2 + 28x + 20 \geqslant 0$,

$x^2 - 7x - 5 \leqslant 0$.

5. Решаем неравенство графически. Находим корни трёхчлена $x^2 - 7x - 5$,

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+20}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$,

$x_1 = \frac{7-\sqrt{69}}{2}$, $x_2 = \frac{7+\sqrt{69}}{2}$.

Так как $\sqrt{69} > 7$, то $x_1 < 0$.

Так как $8 < \sqrt{69} < 9$, то $7{,}5 < \dfrac{7+\sqrt{69}}{2} < 8$.

Ветви параболы $y = x^2 - 7x - 5$ направлены вверх, эскиз графика имеет вид (см. рис. 242)

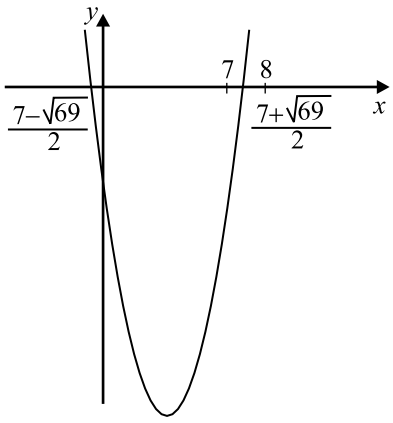


Рис. 242

Из рисунка видно, что наибольшее целое значение $x$, при котором выполняется неравенство $x^2 - 7x - 5 \leqslant 0$ равно 7. Для этого значения выполнено ограничение $x > 5$.

*Ответ:* 7.

**18.** 1. Учитывая, что $f'(x) = -2x + 8$, запишем уравнение касательной, проходящей через некоторую точку графика $(x_0, y_0)$ рассматриваемой функции (см. рис. 243; удобно обозначить $a = x_0$).

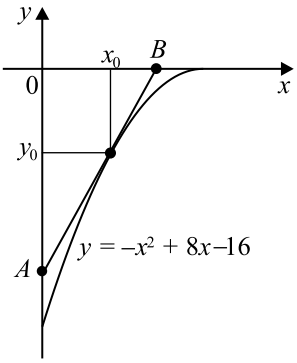


Рис. 243

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,;$$
$$y = -x_0^2 + 8x_0 - 16 + (-2x_0 + 8)(x - x_0)\,;$$
$$y = (-2x_0 + 8)x + (x_0^2 - 16)\,.$$

Отсюда, полагая $x = 0$, а потом $y = 0$, получаем координаты точек пересечения с осями:

$$A\left(0,\ x_0^2 - 16\right) \quad \text{и} \quad B\left(\frac{x_0^2 - 16}{2x_0 - 8},\ 0\right), \quad \text{т.е.} \quad B\left(\frac{1}{2}(x_0 + 4),\ 0\right).$$

2. $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x_0 + 4) \cdot (16 - x_0^2) = -\frac{1}{4} \cdot (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 4)^2$.

Таким образом, будем искать максимальное значение функции

$$g(a) = -\frac{1}{4}(a-4)(a+4)^2\,,\ a \in (0,4).$$

3. Производная равна

$$g'(a) = -\frac{1}{4}((a+4)^2 + 2(a-4)(a+4)) = -\frac{1}{4}(a+4)(3a-4)\,,$$

откуда $g'(a) = 0$ при $a = -4$ (это значение не подходит по условию задачи) или $a = \frac{4}{3}$.

Убедимся, что точка $a = \frac{4}{3}$ на $(0,4)$ является точкой максимума функции $g(a)$ (см. рис. 244).

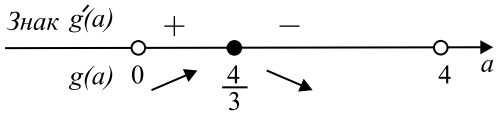


Рис. 244

Максимальная площадь равна

$$-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - 4\right) \cdot \left(\frac{4}{3} + 4\right)^2 = \frac{512}{27}\,.$$

*Ответ:* $\frac{4}{3}; \frac{512}{27}$.

**19.** а). Столбцами «хорошей» таблицы размера $2 \times 2$ могут являться следующие столбцы, содержащие только два элемента: $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$, $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$.

Так как в «хорошей» таблице нет одинаковых столбцов, то столбцами этих таблиц будет любая пара из трёх указанных столбцов. Их число совпадает с числом размещений из трёх по два и равно $A_3{}^2 = 3 \cdot 2 = 6$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array};\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array};\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array};\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array};\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array};\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}.$$

Первые четыре таблицы эквивалентны между собой (вторая получается из первой перестановкой строк, третья из второй перестановкой столбцов, а четвёртая из третьей перестановкой строк). Также эквивалентными являются 5-я и 6-я таблицы. Попарно неэквивалентных оказалось две. В них разное число единиц, поэтому получить одну из другой невозможно.

б) 1. В двоичной системе счисления цифрами являются 0 и 1. Число 1110 в двоичной системе равно числу $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 14$ в десятичной системе. Аналогично, число 1101 в двоичной системе равно числу 13 в десятичной системе, число 1011 в двоичной системе равно числу 11 в десятичной системе, а число 0111 соответственно числу 7.

Тем самым строкам заданной таблицы соответствуют числа 14, 13, 11 и 7 в десятичной системе. Учитывая, что в каждом столбце также три цифры 1 и одна цифра 0, столбцам таблицы также соответствуют числа 14, 13, 11 и 7 в десятичной системе (цифры столбцов рассматриваем сверху вниз).

2. Любой таблице, полученной из заданной перестановкой строк будет соответствовать некоторая упорядоченная последовательность чисел 14, 13, 11 и 7.

Число таких последовательностей равно числу перестановок из четырёх элементов и равно числу $4! = 24$. Тем самым можно построить 24 различные таблицы, переставляя строки заданной таблицы.

3. Заметим также, что любой последовательности чисел 14, 13, 11 и 7, соответствующей строкам таблицы будет однозначно соответствовать последовательность таких же чисел, соответствующей столбцам этой таблицы и наоборот. Таким образом, любая перестановка двух столбцов может быть заменена некоторой перестановкой строк. Отсюда следует, что существует ровно 24 различные таблицы эквивалентные заданной таблице.

в) 1) В таблице, содержащей $M$ строк столбцы содержат $M$ элементов, каждый из которых 1 или 0. Тогда количество таких всевозможных столбцов равно $2^M$. Так как нулевой столбец не может быть столбцом «хорошей» таблицы, то максимальное число различных ненулевых столбцов равно $2^M - 1$.

Если таблица содержит $N$ столбцов, то минимальное число строк в такой таблице будет наименьшим натуральным числом $x$, удовлетворяющим неравенству $N \leqslant 2^x - 1$.

2) Согласно условию находим наименьшее $x \in N$, удовлетворяющее неравенству $4 \leqslant 2^x - 1$. Получаем $x = 3$.

Наибольшее число единиц будет в таблице, каждый столбец которой содержит максимально возможное число 1. Искомой является таблица

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

.

Отсутствие 0 в каком-либо столбце, кроме столбца из единиц, привело бы к появлению двух одинаковых столбцов, что невозможно в «хорошей» таблице.

*Ответ:* а) 2; б) 24; в) 1) наименьшее $x \in N$, удовлетворяющее неравенству $N \leqslant 2^x - 1$; 2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

.