Задача 1.

Найдите наименьшее значение параметра p , для которого при всех $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2,$

$0 \le z \le 7$ выполняется неравенство $xyz + p \ge 19x + 7y + 2z?$

Решение:

Введем функцию $f(x, y, z) = 19x + 7y + 2z - xyz$. Найдем значения $z,\ x,\ y$, при которых функция $f(x, y, z)$ достигает наибольшего значения на промежутках $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 7.$

$p \ge f(x, y, z)$

При фиксированном значении $0 \le x \le 1$; и $0 \le y \le 2$;

Рассмотрим функцию $f(z) = 19x + 7y + 2z - xyz$, где $0 \le z \le 7$

Найдем производную функции $f(z) = 19x + 7y + 2z - xyz$.

Производная равна $f^{/}(z) = 2 - xy \ge 0$, при $0 \le x \le 1;$ и $0 \le y \le 2$, возрастающая линейная функция $f(z)$ достигает наибольшее значение на правом конце промежутка, при $z = 7$.

Подставим в $f(z) = 19x + 7y + 2z - xyz$ вместо $z = 7$, получим $g(x, y) = 19x + 7y + 14 - 7xy$

При фиксированном x, где $0 \le x \le 1$ рассмотрим функцию $g(y) = 19x + 7y + 14 - 7xy$, $0 \le y \le 2;$

$g^{/}(y) = 7y - 7x \ge 0$, при $0 \le x \le 1$, Так как производная неотрицательна, то наибольшее значение возрастающая линейная функция $g(y)$ достигает на правом конце промежутка, то есть при $y = 2$.

$h(x) = 19x + 14 + 14 - 14x = 5x + 28$ - функция возрастающая, достигает наибольшего значения при $x = 1$.

Подставим значение $z = 7,\ x = 1,\ y = 2$ в $f(x, y, z) = 19x + 7y + 2z - xyz$

$p \ge 19 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 7 = 33$

Наименьшее значение параметра $p = 33$

Ответ: Наименьшее значение параметра $p = 33$.