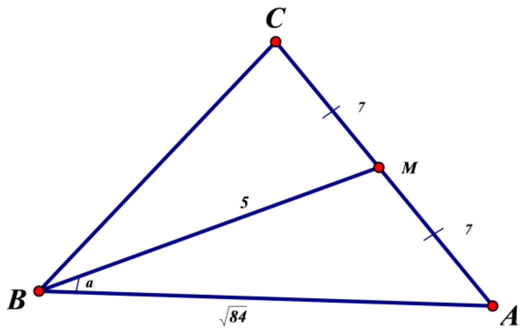
24. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{84}$ и она больше половины AC. Найдите сторону BC, если медиана BM равна 5, а площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$.
Решение.



BM – медиана, AM=CM, поэтому $S_{ABM} = S_{CBM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 10\sqrt{3}$.

$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot sina = 10\sqrt{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{84} \cdot 5 \cdot sina = 10\sqrt{3}$; $sina = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{\sqrt{84} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

$cosa = \sqrt{1 - sin^2 a} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

В треугольнике ABM по теореме косинусов: $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot cosa$;

$AM^2 = 84 + 25 - 2 \cdot \sqrt{84} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 109 - 60 = 49$; AM=7, AC=14.

$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot cosA$; $cosA = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM} = \frac{84+49-25}{2 \cdot \sqrt{84} \cdot 7} = \frac{108}{2 \cdot \sqrt{84} \cdot 7} = \frac{54}{7\sqrt{84}}$.

В треугольнике ABC по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cosA$;

$BC^2 = 84 + 14^2 - 2 \cdot \sqrt{84} \cdot 14 \cdot \frac{54}{7\sqrt{84}} = 84 + 196 - 216 = 64$; BC=8.

Ответ. 8.