C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-\cos x=0, \\ (2\sqrt{\cos x}-1)(2y-4)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=2, \\ \cos x\geq 0 \end{cases}$ или $\cos x=\frac{1}{4}$.

Если $y=2$, то из первого уравнения $\cos x=2$. Уравнение не имеет решений.

Если $\cos x=\frac{1}{4}$, то $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=\frac{1}{4}$.

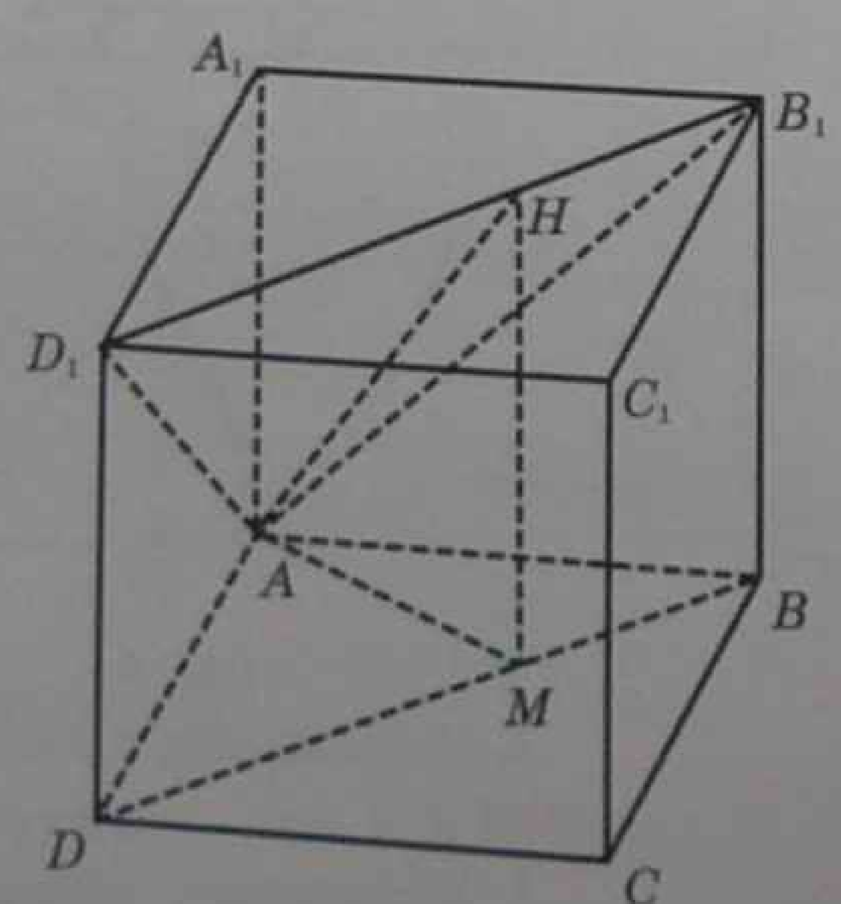
Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;\ \frac{1}{4}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=8$, $AD=6$, $CC_1=5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

Решение.

Плоскости BDD_1 и AD_1B_1 имеют общую прямую B_1D_1. Проведем перпендикуляр AH к B_1D_1 и перпендикуляр AM к BD. Прямая HM – проекция прямой AH на плоскость BDD_1. По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $B_1D_1\perp HM$. Значит, угол AHM – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.



Из прямоугольного треугольника BAD находим: $AM=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{24}{5}$.

Из прямоугольного треугольника AMH находим: $\operatorname{tg}\angle AHM=\frac{AM}{HM}=\frac{24}{25}$.

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{3^{x+4}} 27}{\log_{3^{x+4}}(-81x)}\leq\frac{1}{\log_3\log_{\frac{1}{3}} 3^x}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x\neq -1, \\ x\neq -\frac{1}{81}, \\ x\neq -4, \\ x<0. \end{cases}$

Пусть $t=\log_3(-x)$, тогда $\frac{3}{4+t}\leq\frac{1}{t}\ \Leftrightarrow\ t\in(-\infty;\ -4)\cup(0;\ 2]$.

Значит, $x\in[-9;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$. С учетом ограничений получаем: $x\in[-9;\ -4)\cup(-4;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$

Ответ: $[-9;\ -4)\cup(-4;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=1:5$. Найдите BC, если $AB=3$.

Решение.

Пусть E – точка пересечения биссектрис, $BM=x$, $MN=y$, $NC=z$.

Так как $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}<1$, то точка M лежит между точками B и N. Возможны два случая:

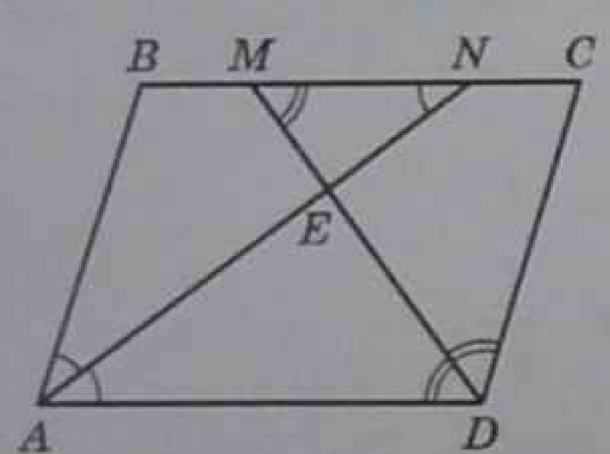


Рис. 1

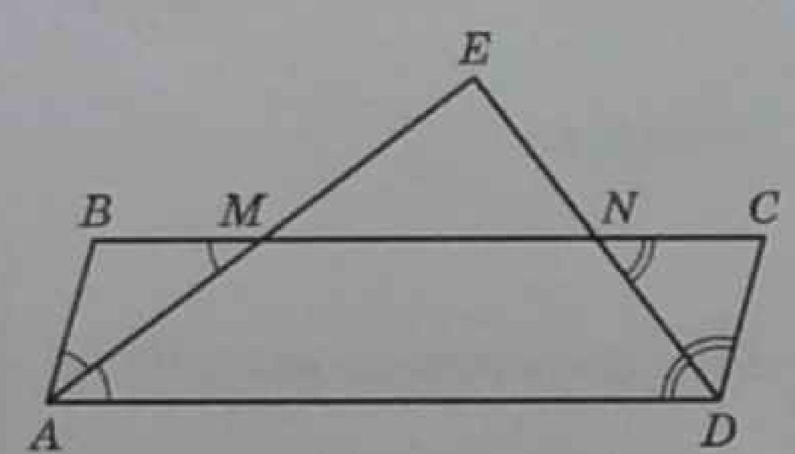


Рис. 2

1. Точка E – внутри параллелограмма (рис. 1). Тогда, так как треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x+y=3=y+z$, следовательно, $x=z<y$; $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$, следовательно, $y=\frac{5}{2}$, $z=x=\frac{1}{2}$, $BC=2x+y=\frac{7}{2}$.

2. Точка E – вне параллелограмма (рис. 2). Тогда $x=z=3$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$, следовательно, $y=15$, $BC=2x+y=21$.

Ответ: 3,5 или 21.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-8x+7|$ меньше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+7\geq 0$: $f(x)=x^2+2(2a-4)x+7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-2a$;

б) при $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+(4a+8)x-7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

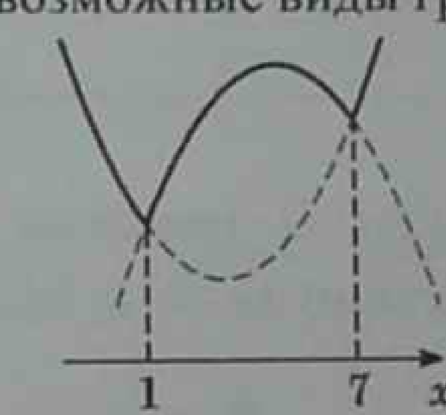


Рис. 1

Рис. 2

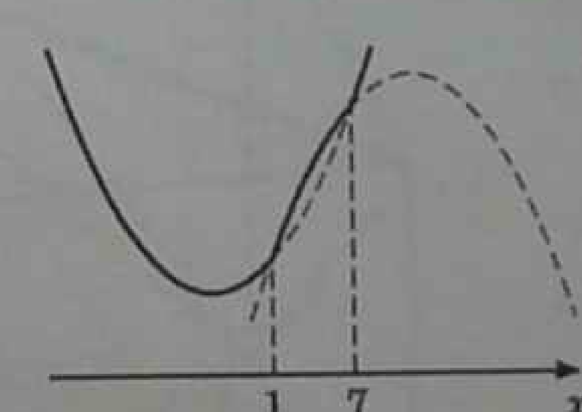


Рис. 3

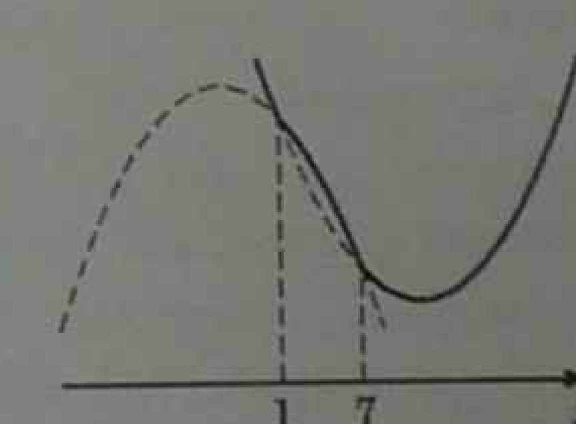


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься только в точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-2a\notin[1;\ 7]$ – то в точке $x=4-2a$.

3. Наименьшее значение функции f меньше 1 тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<1 \\ f(7)<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4-2a<1 \\ 4-2a>7, \end{array}\right. \\ f(4-2a)<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a<1 \\ 28a<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{3}{2} \\ a>\dfrac{3}{2}, \end{array}\right. \\ |2a-4|>\sqrt{6} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{1}{4} \\ a>\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a<\frac{1}{4}$; $a>\frac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С6 Каждое из чисел 11, 12, …, 19 умножают на каждое из чисел 3, 4, …, 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(3+\ldots+8)(11+\ldots+19)=\left(\frac{3+8}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{11+19}{2}\cdot 9\right)=33\cdot 135=4455.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(3-4-5+6-7+8)(-11-12-13+14-15-16+17+18+19)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1 и 4455.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\cos x=0, \\ (4\sqrt{\cos x}-1)(2y+6)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=-3, \\ \cos x\geq 0 \end{cases}$ или $\cos x=\frac{1}{16}$.

Если $y=-3$, то из первого уравнения $\cos x=3$. Уравнение не имеет решений.

Если $\cos x=\frac{1}{16}$, то $x=\pm\arccos\frac{1}{16}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{16}$.

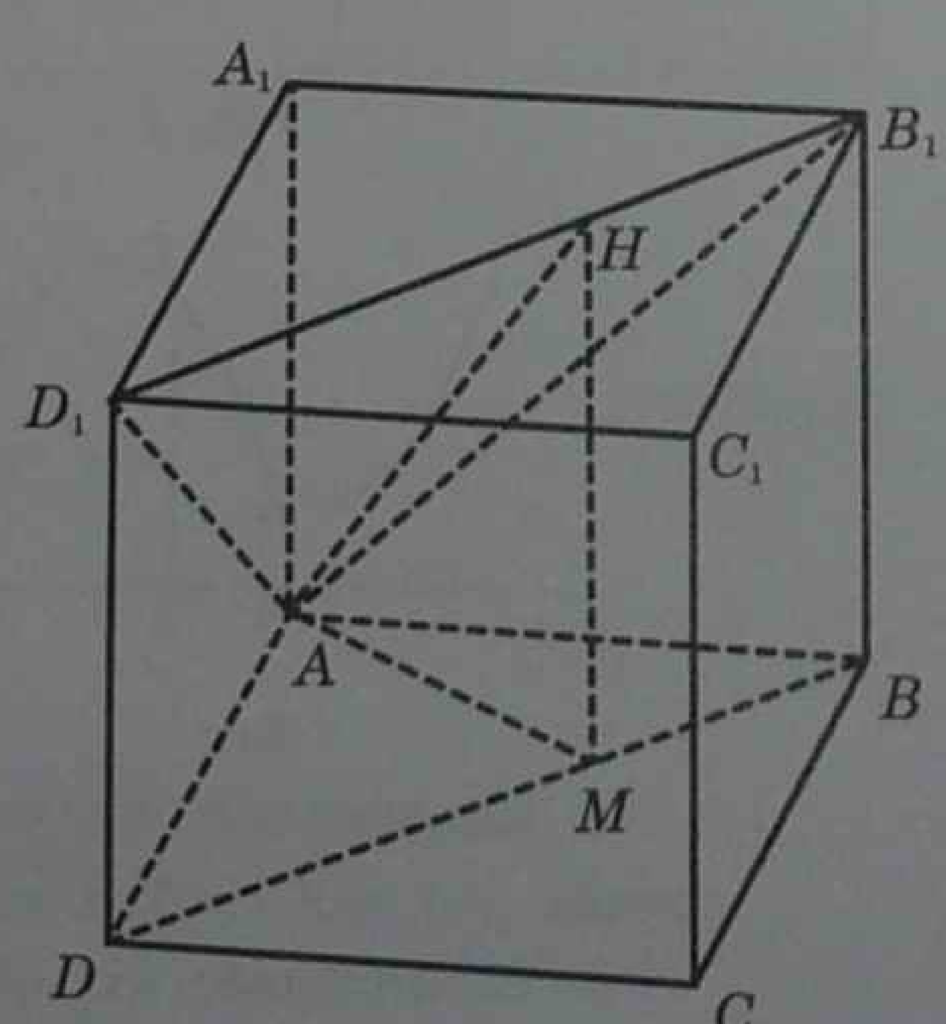
Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{16}+2\pi n;\ -\frac{1}{16}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=8$, $AD=6$, $CC_1=5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

Решение.

Плоскости BDD_1 и AD_1B_1 имеют общую прямую B_1D_1. Проведем перпендикуляр AH к B_1D_1 и перпендикуляр AM к BD. Прямая HM – проекция прямой AH на плоскость BDD_1. По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $B_1D_1\perp HM$. Значит, угол AHM – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.



Из прямоугольного треугольника BAD находим: $AM=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{24}{5}$.

Из прямоугольного треугольника AMH находим: $\operatorname{tg}\angle AHM=\frac{AM}{HM}=\frac{24}{25}$.

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{2x+4}4}{\log_{2x+4}(-8x)}\leq\frac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{2}}2^x}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x\neq -1, \\ x\neq -\frac{1}{8}, \\ x\neq -4, \\ x<0. \end{cases}$

Пусть $t=\log_2(-x)$, тогда $\frac{2}{3+t}\leq\frac{1}{t}\Leftrightarrow t\in(-\infty;\ -3)\cup(0;\ 3]$.

Значит, $x\in[-8;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{8};\ 0\right)$.

С учетом ограничений получаем: $x\in[-8;\ -4)\cup(-4;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{8};\ 0\right)$.

Ответ: $[-8;\ -4)\cup(-4;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{8};\ 0\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=1:7$. Найдите BC.

Решение.

Пусть E – точка пересечения биссектрис, $BM=x$, $MN=y$, $NC=z$.

Так как $\frac{x}{y}=\frac{1}{7}<1$, то точка M лежит между точками B и N.

Возможны два случая:

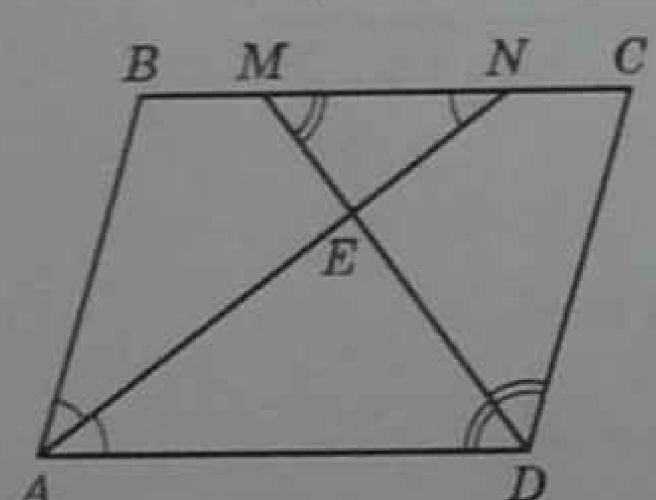


Рис. 1

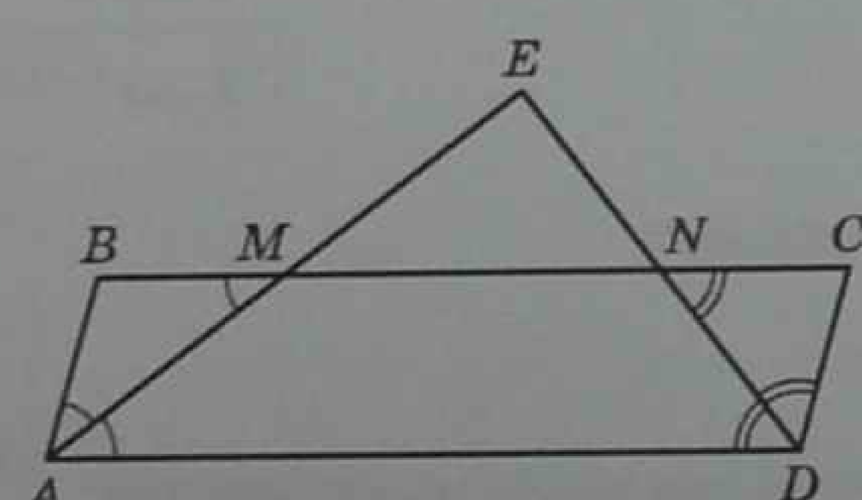


Рис. 2

1. Точка E – внутри параллелограмма (рис. 1). Тогда, так как треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x+y=12=y+z$, следовательно, $x=z<y$; $\frac{x}{y}=\frac{1}{7}$, следовательно, $y=\frac{21}{2}$, $z=x=\frac{3}{2}$, $BC=2x+y=\frac{27}{2}$.

2. Точка E – вне параллелограмма (рис. 2). Тогда $x=z=12$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{7}$; $y=84$, $BC=2x+y=108$.

Ответ: 13,5 или 108.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значени… функции $f(x)=4ax+|x^2-8x+7|$ меньше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+7\geq 0$: $f(x)=x^2+2(2a-4)x+7$, а ее график есть две част… параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-2a$;

б) при $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+(4a+8)x-7$, а ее график есть част… параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

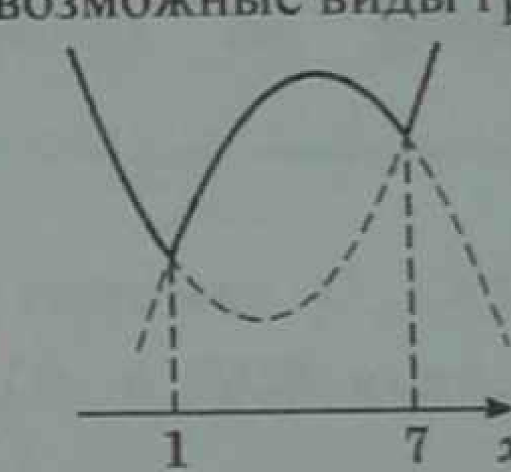


Рис. 1

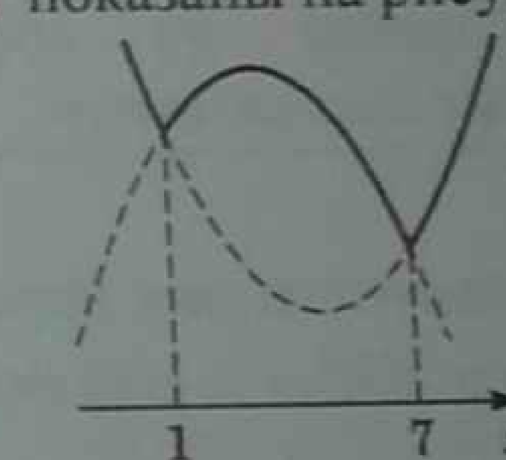


Рис. 2

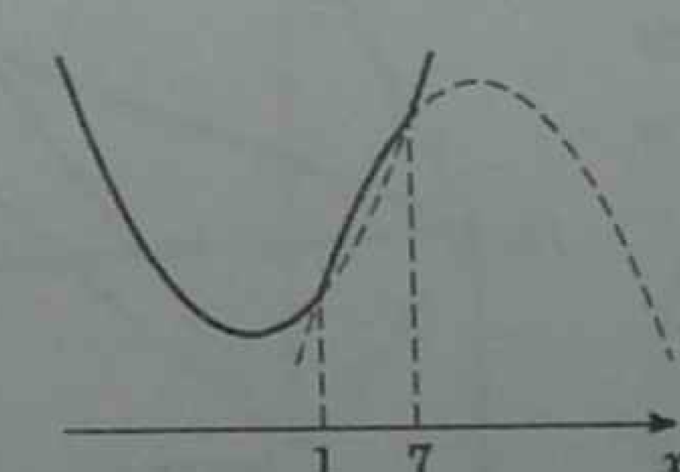


Рис. 3

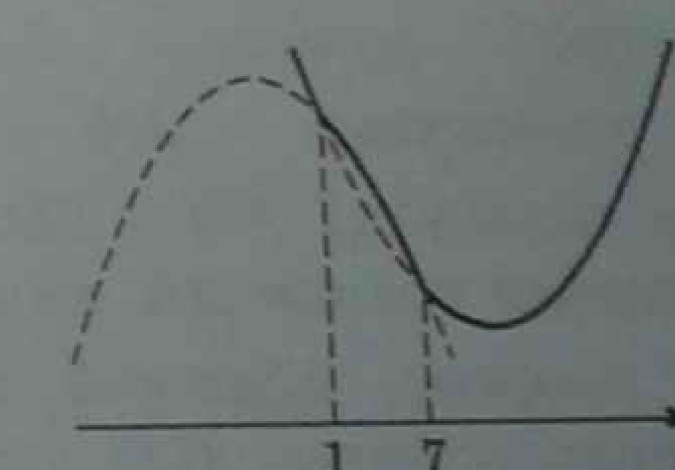


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься тол… точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-2a\notin[1;\ 7]$ – то в точке $x=4-2a$.

3. Наименьшее значение функции f меньше 1 тогда и только … когда

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<1 \\ f(7)<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4-2a<1 \\ 4-2a>7, \end{array}\right. \\ f(4-2a)<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a<1 \\ 28a<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{3}{2} \\ a>\dfrac{3}{2}, \end{array}\right. \\ |2a-4|>\sqrt{6} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{1}{4} \\ a>\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a<\dfrac{1}{4}$; $a>\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Каждое из чисел 9, 10, …, 17 умножают на каждое из чисел 1, 2, …, 6 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(1+\ldots+6)(9+\ldots+17)=\left(\frac{1+6}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{9+17}{2}\cdot 9\right)=21\cdot 117=2457\,.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(1-2-3+4-5+6)(-9-10-11+12-13+14-15+16+17)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1 и 2457.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y-\cos x=0, \\ (5\sqrt{\cos x}-1)(7y+5)=0. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=-\frac{5}{7}, \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$ или $\cos x=\frac{1}{25}$.

Если $y=-\frac{5}{7}$, то из первого уравнения $\cos x=-\frac{5}{7}$. Это противоречит условию $\cos x \ge 0$.

Если $\cos x=\frac{1}{25}$, то $x=\pm\arccos\frac{1}{25}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=\frac{1}{25}$.

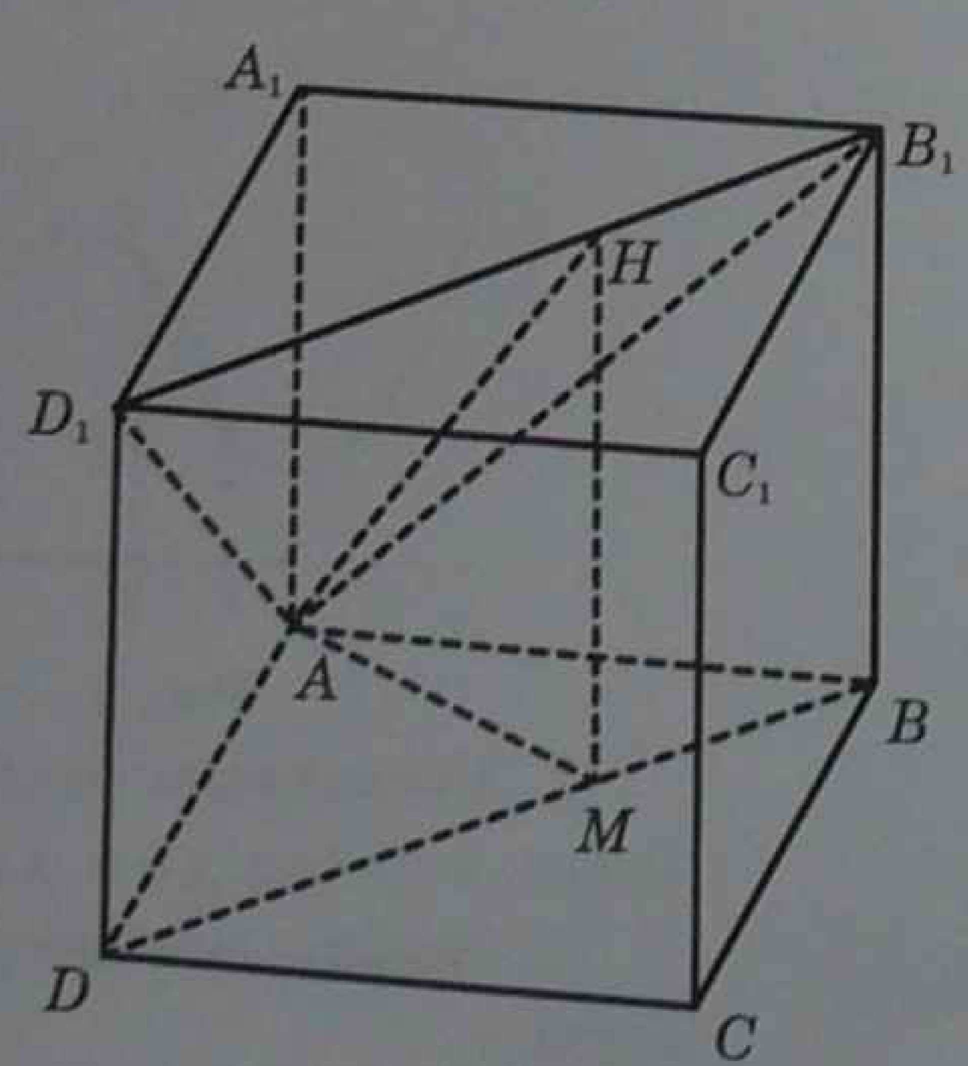
Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{25}+2\pi n;\ \frac{1}{25}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=5$, $AD=12$, $CC_1=4$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

Решение.

Плоскости BDD_1 и AD_1B_1 имеют общую прямую B_1D_1. Проведем перпендикуляр AH к B_1D_1 и перпендикуляр AM к BD. Прямая HM – проекция прямой AH на плоскость BDD_1. По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $B_1D_1 \perp HM$. Значит, угол AHM – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.



Из прямоугольного треугольника BAD находим: $AM=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{60}{13}$.

Из прямоугольного треугольника AMH находим: $\operatorname{tg}\angle AHM=\frac{AM}{HM}=\frac{15}{13}$.

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{15}{13}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{15}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{3^{x+3}} 27}{\log_{3^{x+3}}(-81x)} \le \frac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne -\frac{1}{81}, \\ x \ne -3, \\ x < 0. \end{cases}$

Пусть $t=\log_3(-x)$, тогда $\frac{3}{4+t} \le \frac{1}{t} \Leftrightarrow t\in(-\infty;\ -4)\cup(0;\ 2]$.

Значит, $x\in[-9;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$.

С учетом ограничений получаем: $x\in[-9;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$.

Ответ: $[-9;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{81};\ 0\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=1:4$. Найдите BC, если $AB=15$.

Решение.

Пусть E – точка пересечения биссектрис, $BM=x$, $MN=y$, $NC=z$.

Так как $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}<1$, то точка M лежит между точками B и N. Возможны два случая:

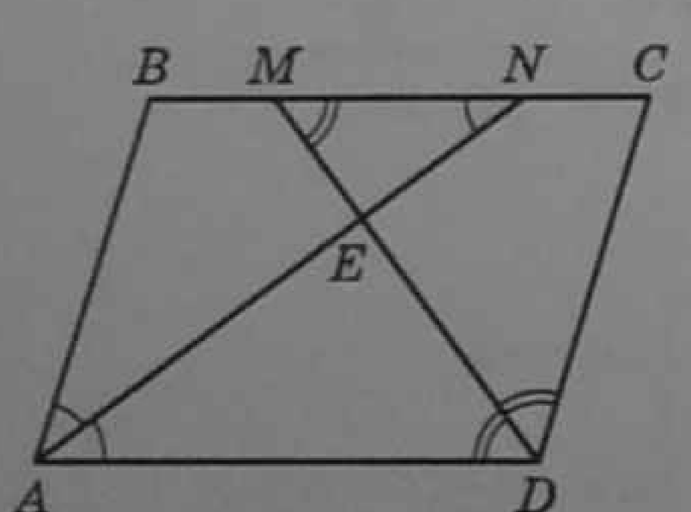


Рис. 1

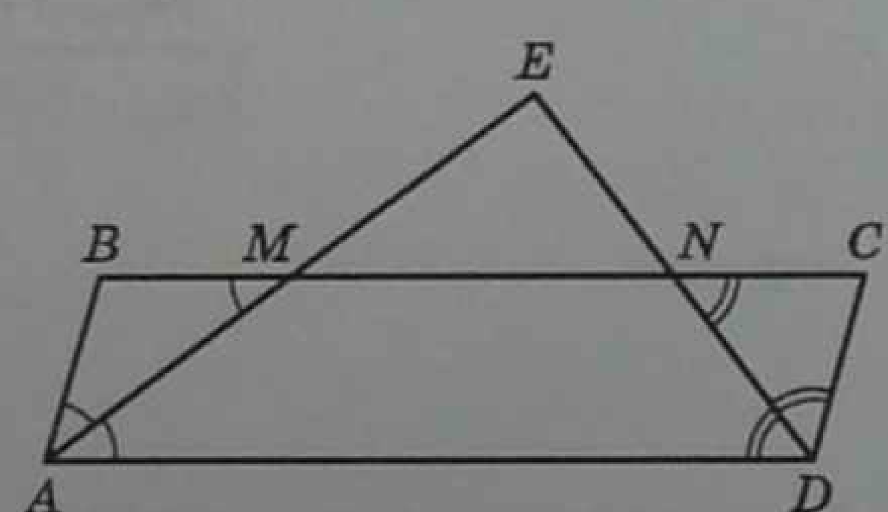


Рис. 2

1. Точка E – внутри параллелограмма (рис. 1). Тогда, так как треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x+y=15=y+z$, следовательно, $x=z<y$; $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$, следовательно, $y=12$, $z=x=3$, $BC=2x+y=18$.

2. Точка E – вне параллелограмма (рис. 2). Тогда $x=z=15$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$, следовательно, $y=60$, $BC=2x+y=90$.

Ответ: 18 или 90.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+15|$ меньше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+15\geq 0$: $f(x)=x^2+2(a-4)x+15$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$;

б) при $x^2-8x+15<0$: $f(x)=-x^2+(2a+8)x-15$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

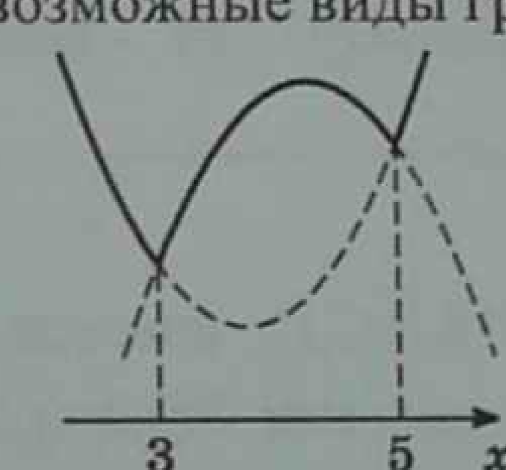


Рис. 1

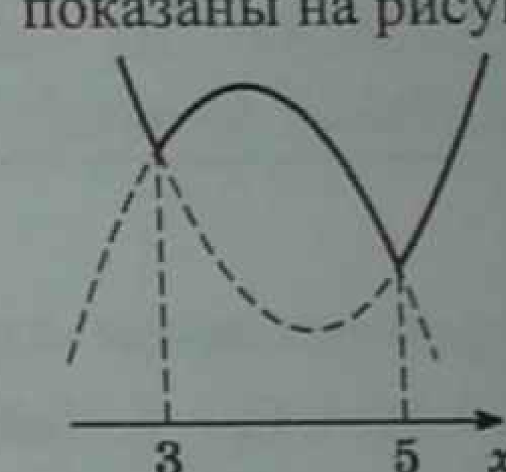


Рис. 2

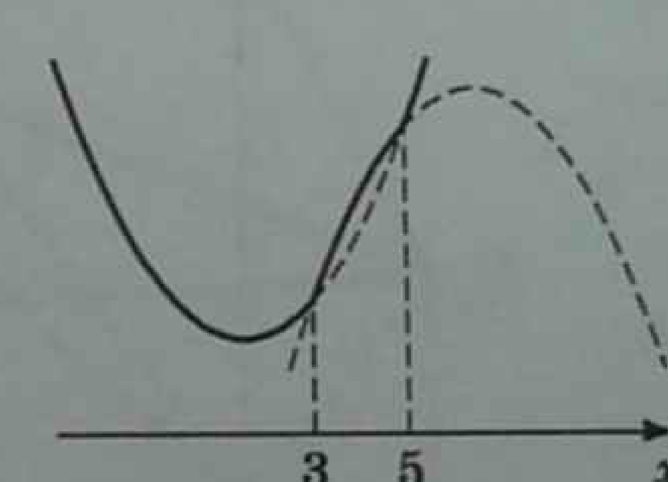


Рис. 3

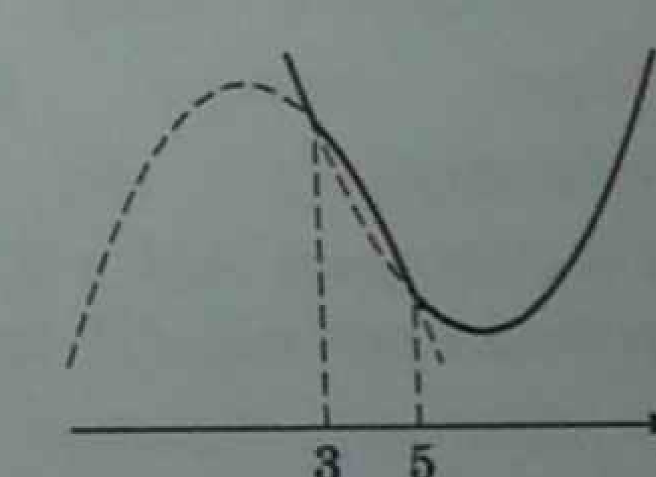


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься только в точках $x=3$ или $x=5$, а если $4-a\notin[3;\,5]$ – то в точке $x=4-a$.

3. Наименьшее значение функции f меньше 1 тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} f(3)<1 \\ f(5)<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4-a<3 \\ 4-a>5, \end{array}\right. \\ f(4-a)<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6a<1 \\ 10a<1 \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>1, \end{array}\right. \\ |a-4|>\sqrt{14} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{1}{6} \\ a>4+\sqrt{14}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a<\frac{1}{6}$; $a>4+\sqrt{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Каждое из чисел 9, 10, …, 17 умножают на каждое из чисел 3, 4, …, 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(3+\ldots+8)(9+\ldots+17)=\left(\frac{3+8}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{9+17}{2}\cdot 9\right)=33\cdot 117=3861.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(3-4-5+6-7+8)(-9-10-11+12-13+14-15+16+17)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1 и 3861.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0