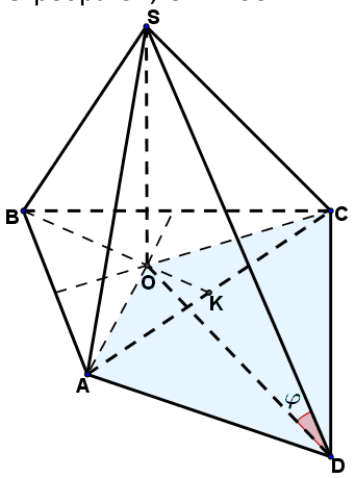
№14 вариант 189.

В четырехугольной пирамиде SABCD (четырехугольник в основании выпуклый) боковые ребра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 3. Длина SD равна 9. Найдите
а) угол наклона ребра SD к плоскости основания.
б) наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды SABCD.

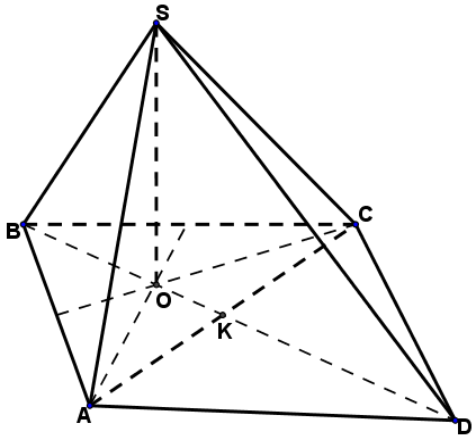


Решение.

а)Треугольники ASB, BSC, ASC – равнобедренные, прямоугольные с катетами $SA = SB = SC = 3 \Longrightarrow \Delta ASB = \Delta BSC = \Delta ASC$ и $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$

SO – высота пирамиды $SABCD$, причем O – центр равностороннего ΔABC (равные наклонные SA, SB, SC имеют равные проекции OA, OB, OC).

$BO = \dfrac{AC}{2sin60°} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. Из ΔSOB найдем $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{3}$.



Из ΔSOD найдем $sin\varphi = \dfrac{SO}{SD} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$, тогда $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

б)$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}S_{ABCD}$ и объем будет наибольший при наибольшей возможной площади $ABCD$.

$S_{ABCD} = S_{ABCO} + S_{AOCD} = \dfrac{2}{3}S_{ABC} + S_{AOCD}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABCO} = 3\sqrt{3}$; $S_{AOCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot OD \cdot \sin\alpha$, где α – угол между AC и OD.

Из ΔSOD найдем $OD = \sqrt{SD^2 - SO^2} = \sqrt{78}$; S_{AOCD} будет наибольшей, если $\alpha = 90°$.

Тогда $S_{AOCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot OD = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{78} = 3\sqrt{39}$; $S_{ABCD} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{39} = 3\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{13}\right)$ и

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{13}\right) \cdot \sqrt{3} = 3\left(1 + \sqrt{13}\right)$.

Ответ: *а*) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; *б*)$3\left(1 + \sqrt{13}\right)$.