А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин

Геометрия
10–11 классы

Новое издание,
исправленное и дополненное

Учебник для общеобразовательных учреждений
Профильный уровень
Рекомендован Министерством образования
и науки Российской Федерации

Москва
Издательство МЦНМО
2011

§ 11.8. Примеры решения задач методом координат

— Теперь формулирую задачу, — сказал он, как говаривал когда-то, читая лекции. — Повесьте уши на гвоздь внимания.

Е. Войскунский, И. Лукодьянов. Экипаж «Меконга»

В этом параграфе мы решим несколько задач, в которых система координат изначально не фигурирует, а вводится по мере надобности в процессе решения (упрощённо говоря, в этом и заключается суть метода координат). В целом приводимые ниже задачи значительно сложнее задач, которые встречались на протяжении этой главы.

Пример 11.20. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $(AB) \parallel (CD)$ и $CD:AB=\lambda<1$. Плоскость, проходящая через точку B, пересекает рёбра AA_1, CC_1 и прямую DD_1 в точках M, N и P соответственно, причём $AM : AA_1 = m$, $CN : CC_1 = n$. Найти отношение $DP : DD_1$.

Решение. Обозначим $\vec{g}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{g}_2 = \overrightarrow{DC}$ и $\vec{g}_3 = \overrightarrow{DD_1}$ и введём аффинную систему координат $\{D, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. В этой системе (рис. 11.10) вершины призмы имеют координаты $A(1, 0, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $B_1(x_B, y_B, 1)$, $C_1(0, 1, 1)$, $D_1(0, 0, 1)$, где x_B, y_B — неизвестные пока абсцисса и ордината точки B (эта точка лежит

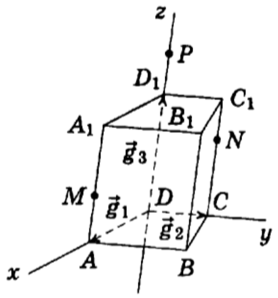

Рис. 11.10

в плоскости DAC, поэтому её аппликата z_B равна нулю). По условию $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, т. е.

$$\vec{g}_2 = \lambda((x_B - 1)\vec{g}_1 + y_B\vec{g}_2 + 0\cdot\vec{g}_3).$$

Отсюда находим, что $\lambda(x_B - 1) = 0$, $\lambda y_B = 1$, следовательно, $x_B = 1$, $y_B = \dfrac{1}{\lambda}$. Далее, по условию

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - 1, y_M, z_M) = m\overrightarrow{AA_1},$$

где $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$. Значит, $x_M - 1 = m\cdot 0 = 0$, $y_M = m\cdot 0 = 0$, $z_M = m\cdot 1 = m$, т. е. точка M имеет координаты $(1, 0, m)$. Аналогично $N(0, 1, n)$. Напишем уравнение плоскости BMN:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1/\lambda & z-0 \\ 1-1 & 0-1/\lambda & m-0 \\ 0-1 & 1-1/\lambda & n-0 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-1) - m\left(y - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0.$$

Точка $P(0, 0, z_P)$ лежит на оси аппликат, и $P \in (BMN)$. Поэтому

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(0-1) - m\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z_P}{\lambda} = 0,$$

т. е. $z_P = n + \lambda m$. Тогда $DP : DD_1 = |z_P\vec{g}_3| : |\vec{g}_3| = |z_P| = n + \lambda m$. $\square$

Пример 11.21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину C_1 проведена плоскость, пересекающая продолжения рёбер AB, AD и AA_1 за точки B, D и A_1 в точках B_0, D_0 и A_0 соответственно так, что $AB_0 : AB = AD_0 : AD = 3\cdot AA_0 : AA_1$. Найти отношение объёмов параллелепипеда и тетраэдра $AA_0B_0D_0$.

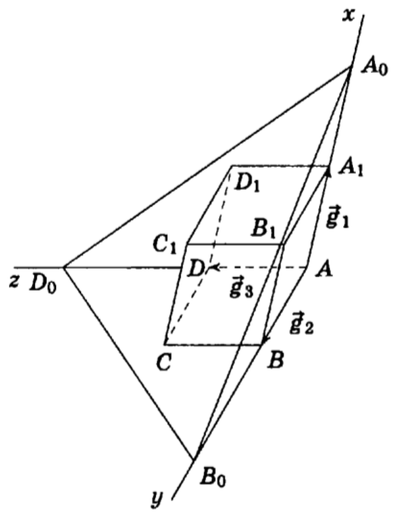

Рис. 11.11

Решение. Пусть $\vec{g}_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{g}_2 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{g}_3 = \overrightarrow{AD}$, и введём аффинную систему координат $\{A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ (рис. 11.11). По условию $A_0\left(\frac{\lambda}{3}, 0, 0\right)$, $B_0(0, \lambda, 0)$, $D_0(0, 0, \lambda)$, $\lambda > 0$. Напишем уравнение плоскости $A_0B_0D_0$:

$$\begin{vmatrix} x-\lambda/3 & y-0 & z-0 \\ 0-\lambda/3 & \lambda-0 & 0-0 \\ 0-\lambda/3 & 0-0 & \lambda-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+y+z-\lambda = 0.$$

Точка $C_1(1, 1, 1)$ лежит в этой плоскости, поэтому $3 \cdot 1 + 1 + 1 - \lambda = 0$, т. е. $\lambda = 5$.

Объём параллелепипеда равен $V = |(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)|$, а объём тетраэдра —

$$V_1 = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AA_0}, \overrightarrow{AB_0}, \overrightarrow{AD_0})| = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{\lambda}{3}\vec{g}_1, \lambda\vec{g}_2, \lambda\vec{g}_3\right)\right| = \frac{\lambda^3}{18}|(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)| = \frac{125}{18}V.$$

Итак, $\frac{V}{V_1} = \frac{18}{125}$. □

Как видно из приведённых примеров, аффинную систему координат целесообразно использовать в задачах о нахождении отношений длин отрезков, площадей, объёмов. Подобные задачи, как правило, относятся к многогранникам достаточно общего вида: произвольным призмам, пирамидам и т. п., для которых удобно ввести систему координат, связав её с тремя рёбрами данного многогранника, выходящими из одной вершины. Решать такие задачи в декартовой системе координат весьма затруднительно, да и неестественно.

Декартовы координаты удобны при решении задач о вычислении длин отрезков и величин углов, особенно если они относятся к многогранникам, имеющим три попарно перпендикулярных ребра, — прямоугольным тетраэдрам, прямоугольным параллелепипедам и т. д. Примеры подобных задач мы уже приводили выше, а сейчас рассмотрим несколько более сложные ситуации.

Пример 11.22. В правильной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) величина двугранного угла при основании равна 30°. Точки M, N, P, Q — середины рёбер AB, BC, CD и DA соответственно. Точка E лежит на ребре AB, точка F — на ребре SC. Известно, что углы, образованные прямой EF с плоскостями SMP и SBA, а также прямой DF с плоскостью SNQ, равны. Найти величину α этих углов.

Решение. Пусть O — центр основания данной пирамиды. Возьмём за единицу длины половину длины отрезка AB и введём декартову систему координат $\left\{O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \frac{\overrightarrow{OS}}{|\overrightarrow{OS}|}\right\}$

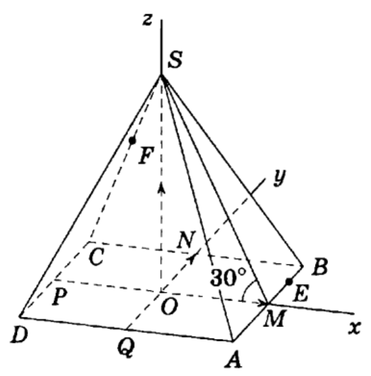

Рис. 11.12

(рис. 11.12). Тогда в этой системе $M(1, 0, 0)$, $P(-1, 0, 0)$, $N(0, 1, 0)$, $Q(0, -1, 0)$, $A(1, -1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(-1, 1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$, $S(0, 0, h)$, $E(1, m, 0)$, $F(-\lambda, \lambda, (1-\lambda)h)$, где $h = \frac{OS}{OM}$, $\lambda = \frac{FS}{SC}$ (h, λ, m пока неизвестны). Запишем уравнения плоскостей ABC, SMP, SNQ и SAB:

$$(ABC)\colon z = 0,$$
$$(SMP)\colon y = 0,$$
$$(SNQ)\colon x = 0,$$
$$(SAB)\colon \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad hx + z - h = 0.$$

Нормальные векторы этих плоскостей имеют вид $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$ и $\vec{n}_4 = (h, 0, 1)$, а направляющие векторы прямых EF и DF таковы:

$$\vec{a} = \overrightarrow{EF} = (-\lambda - 1, \lambda - m, (1-\lambda)h)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{DF} = (-\lambda + 1,\ \lambda + 1,\ (1-\lambda)h).$$

Согласно формулам (11.19) и (11.20) и в соответствии с условием задачи

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_4|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_4|} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}_4|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}_4|} = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{n}_3|} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda-m)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|2h\lambda|}{\sqrt{1+h^2}\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda-m)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + (\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |\lambda - m| = \lambda, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2/3}} = \dfrac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + 4(1-\lambda)^2/3}}. \end{cases}$$

Следовательно, либо $\lambda - m = \lambda$, т. е. $m = 0$, либо $m = 2\lambda$, причём λ в обоих случаях находится из уравнения

$$\lambda^2\left(\frac{7}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{7}{3}\right) = (1-\lambda)^2\left(\frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{4}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-2\lambda)\left((\lambda+1)^2 + \frac{1}{3}(\lambda-1)^2\right) = 0,$$

т. е. $\lambda = \frac{1}{2}$. Итак, либо $m = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, либо $m = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В обоих случаях

$$\sin\alpha = \frac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + 4(1-\lambda)^2/3}} = \sqrt{\frac{3}{31}},$$

т. е. $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{3}{31}}$. □

Пример 11.23. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота — 3. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD — в плоскости одной из боковых граней пирамиды. Найти длину ребра куба.

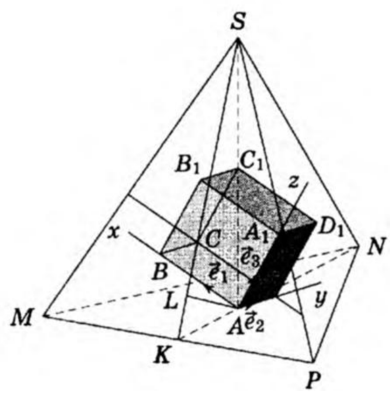

Рис.11.13

Решение. Обозначим данную пирамиду через $SMNP$ (S — вершина). Без ограничения общности можно считать, что ребро CD куба лежит в плоскости SMP. Введём декартову систему координат $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ направлены по рёбрам AB, AD и AA_1 куба (рис. 11.13). Пусть $AB=m$. Тогда $C(m, m, 0)$, $S(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $D(0, m, 0)$. Так как плоскость SMP проходит через точки S, C и D, её уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-m & z-0 \\ m-0 & m-m & 0-0 \\ \sqrt{3}-0 & \sqrt{3}-m & \sqrt{3}-0 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3}y + (m-\sqrt{3})z - m\sqrt{3} = 0.$$

Найдём расстояние от точки $A(0, 0, 0)$ до этой плоскости по формуле (11.21):

$$\rho(A, SMP) = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}}.$$

Это же расстояние можно найти по-другому. Проведём в грани SMP апофему SK и соединим точки A и K. В треугольнике SAK опустим высоту AL на гипотенузу. Тогда AL — искомое расстояние от A до (SMP) (почему?). Теперь уже нетрудно найти, что $AL = \dfrac{SA \cdot AK}{SK} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. Итак,

$$\frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}},$$

откуда

$$m = \frac{6(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5}. \qquad \square$$

Разобранная только что задача представляет собой пример «умного» использования метода координат (т. е. в совокупности с чисто геометрическими методами).

В заключение покажем, как применяется метод координат в задачах на ГМТ.

Пример 11.24. Даны две точки A и B и положительное число k. Найти геометрическое место таких точек M, что $AM : BM = k$.

Решение. Введём декартову систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$ соответственно, $a > 0$. Тогда условие $AM : BM = k$ равносильно такому: $(x+a)^2 + y^2 + z^2 = k^2(x-a)^2 + k^2y^2 + k^2z^2$, где (x, y, z) — координаты точки M (мы воспользовались теоремой 11.8). Если $k = 1$, то полученное уравнение приводится равносильными преобразованиями к виду $x = 0$, т. е. задаёт координатную плоскость Oyz, которая проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Тем самым мы дали другое доказательство утверждения II из § 7.1.

Пусть теперь $k \neq 1$. Тогда наше уравнение равносильными преобразованиями может быть приведено к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2,$$

т. е. задаёт сферу с центром $\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a, 0, 0\right)$ и радиусом $R = \left|\frac{2ka}{1-k^2}\right|$. Этот результат можно сформулировать, не используя координаты: если $AB = 2a$, то искомым ГМТ (при $k \neq 1$) является сфера с центром на прямой AB (укажите самостоятельно, в какой точке по отношению к A и B он находится) и радиусом R. Эта сфера называется *сферой Аполлония*. □