$\lg(x^2(x-2a)+x(2+a)+1-a^2)=\lg(x^2-a^2x+2x-a^2+1)$

ОДЗ: $x^2-a^2x+2x-a^2+1>0$.

$x^2-(a^2-2)x-a^2+1>0$.

$x^2(x-2a)+x(2+a)+1-a^2 = x^2-a^2x+2x-a^2+1$

$x^3-2ax^2+2x+ax = x^2-a^2x+2x$

$x^3-2ax^2-x^2+a^2x+ax=0$

$x(x^2-(2a+1)x+a^2+a)=0$

Разложим $x^2-(2a+1)x+a^2+a$ на множители.

$x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$

$D=(2a+1)^2-4(a^2+a)=1$

$x_{1,2}=\frac{2a+1\pm1}{2}$; $x_1=a$

$x_2=a+1$

Получаем: $x(x-a)(x-a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \\ x=a+1 \end{array}\right.$

① Совпадение корней.

$a=0$: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Проверим, удовлетворяют ли эти корни ОДЗ.

$x^2+2x+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq -1$.

Значит корни $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ удовлетворяют и

$a=0$ - нас устраивает.

$a=-1$: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$; $x^2-(1-2)x>0 \Leftrightarrow x(x+1)>0$

Корни $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ не удовлетв. ОДЗ, значит

$a=-1$ не устраивает.

② Найдем при каких a данные три корня существуют.

1) $x=0$.

$-a^2+1>0 \Leftrightarrow -1<a<1$

2) $x=a$

$a^2-a(a^2-2)-a^2+1>0$

$a^3-2a-1<0$

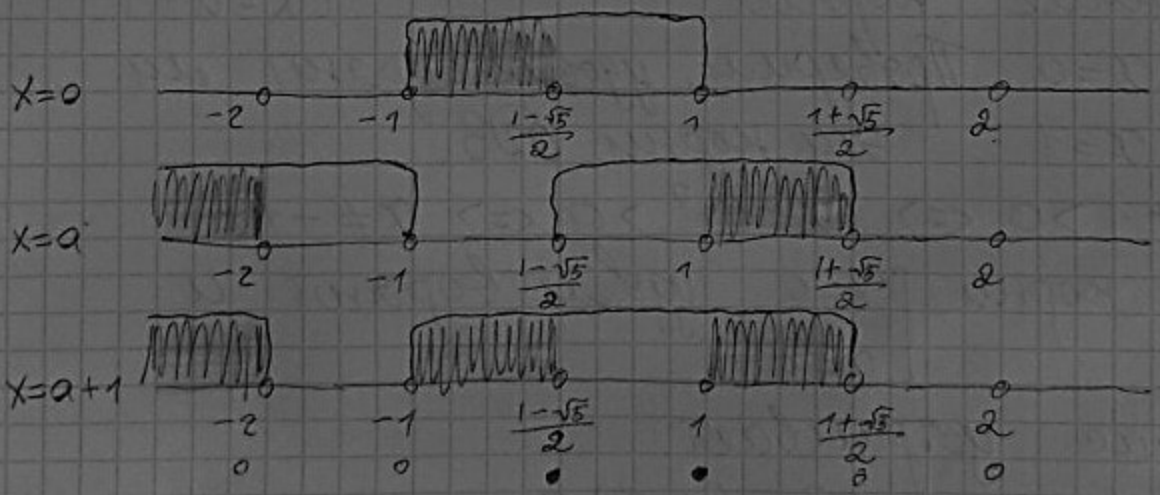
$(a-1)\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

3) $x=a+1$

$(a+1)^2-(a+1)(a^2-2)-a^2+1>0$

$(a-2)(a+1)(a+2)<0$

$\left[\begin{array}{l} a<-2 \\ -1<a<2 \end{array}\right.$



Уравнение имеет два корня при

$a \in (-\infty; -2) \cup \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$