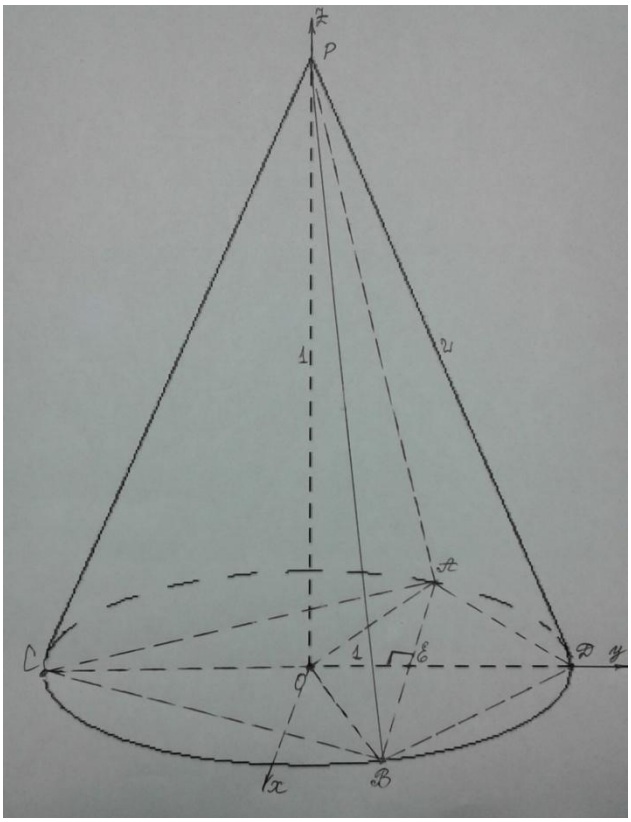
14 (С2) ТР № 197. В конусе с вершиной в точке P высота равна 1, а образующая равна 2.В основании конуса провели диаметр CD и перпендикулярную ему хорду AB. Известно, что хорда AB удалена от центра основания на расстояние, равное 1.

а) Докажите, что треугольник PAB прямоугольный.

б) Найдите сумму объемов пирамид $CAPB$ и $DAPB$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Решение:



а) Поместим заданный конус в декартову систему координат так, как показано на рисунке. Имеем: $O(0;0;0)$, $P(0;0;1)$. $OE=1$. Если радиус основания конуса обозначить R, то $R=OD=\sqrt{PD^2-OP^2}=\sqrt{3}$. $AE=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$. $A(-\sqrt{2};1;0)$, $B(\sqrt{2};1;0)$.

$\overline{PB}=\left(\sqrt{2};1;-1\right)$; $\overline{PA}=\left(-\sqrt{2};1;-1\right)$; $\overline{PB}\cdot\overline{PA}=-2+1+1=0$. $\overline{PB}\perp\overline{PA}$, т.е. $\angle APB=90^\circ$, ΔPAB прямоугольный, что и требовалось доказать.

$$\text{б)}\quad V(CAPB)+V(DAPB)=\frac{1}{3}S(ABC)\cdot PO+\frac{1}{3}S(ADB)\cdot PO=\frac{PO}{3}\cdot S(CADB)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot 2OD\cdot\sin 90^\circ==\frac{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$