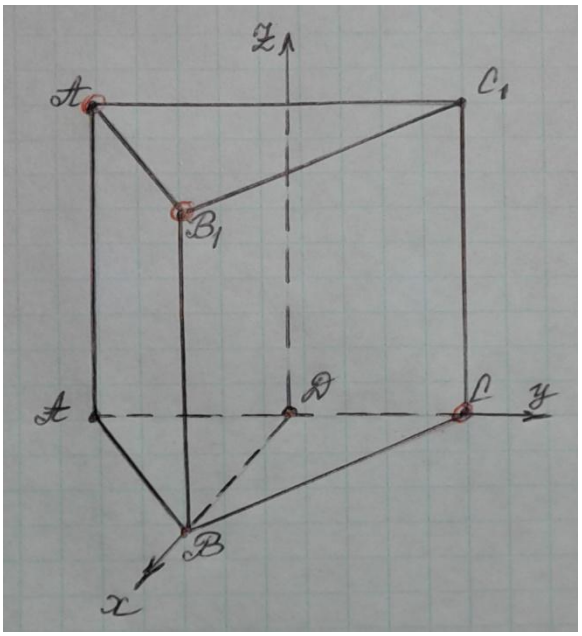
6 (Экз. 10 кл. – 18.05.17, профи). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C равно расстоянию от вершины C_1 до плоскости A_1CB_1.

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью A_1CB_1, если сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а расстояние от вершины одного основания до центра другого равно 9.

Ответ: б) $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

Решение:



а) Пусть $D \in AC$, $AD = CD$. Поместим заданную призму в декартову систему координат так, как показано на рисунке. И пусть сторона основания призмы равна $2m$, а боковое ребро равно h. Имеем: $D(0;0;0)$, $A(0;-m;0)$, $A_1(0;-m;h)$, $B_1(m\sqrt{3};0;h)$, $C(0;m;0)$, $C_1(0;m;h)$.

Составим уравнение плоскости A_1CB_1, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -mb + hc + d = 0 \\ m\sqrt{3}a + hc + d = 0 \\ mb + d = 0 \end{cases}.$$ Из (C):

$b = -\dfrac{d}{m}$. Полученное подставим в (A_1):

$hc + 2d = 0 \;\Leftrightarrow\; c = -\dfrac{2d}{h}$. Для нахождения a используем уравнение (B_1): $m\sqrt{3}a + h\cdot\left(-\dfrac{2d}{h}\right) + d = 0 \;\Leftrightarrow\; m\sqrt{3}a - d = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \dfrac{d}{m\sqrt{3}}$.

Уравнение плоскости A_1CB_1 имеет вид: $\dfrac{d}{m\sqrt{3}}x - \dfrac{d}{m}y - \dfrac{2d}{h}z + d = 0$ или

$hx - h\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}mz + mh\sqrt{3} = 0$, ее нормальный вектор: $\bar{n} = \overline{(h;-h\sqrt{3};-2\sqrt{3}m)}$.

$$\rho(C_1;(A_1CB_1)) = \frac{\left|h\cdot 0 - mh\sqrt{3} - 2\sqrt{3}mh + mh\sqrt{3}\right|}{\sqrt{h^2+3h^2+12m^2}} = \frac{2\sqrt{3}mh}{\sqrt{4(h^2+3m^2)}} = \frac{mh\sqrt{3}}{\sqrt{h^2+3m^2}}.$$

Следующая наша задача: вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и A_1C.

Выберем произвольный вектор, начало которого лежит на прямой AB (пусть такой точкой будет A), а конец – на прямой A_1C, например, точка A_1. Тогда искомое расстояние будет найдено так: $\rho = \dfrac{\left|\bar{n}\cdot\overline{AA_1}\right|}{\left|\bar{n}\right|}$, где $\overline{AA_1} = \overline{(0;0;h)}$. $\rho(AB;A_1C) = \dfrac{\left|h\cdot 0 - h\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}mh\right|}{\sqrt{h^2+3h^2+12m^2}} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}mh}{\sqrt{4(h^2+3m^2)}} = \frac{mh\sqrt{3}}{\sqrt{h^2+3m^2}}.$$

Итак, $\rho(C_1;(A_1CB_1)) = \rho(AB;A_1C)$, что и требовалось доказать.

б) По условию задачи $2m = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow m = 3\sqrt{3}$. Найдем h.

Центр нижнего основания призмы – точка пересечения медиан ΔABC. Обозначим его (центр) буквой O. $BD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9$; $OD = \frac{BD}{3} = 3$; $O(3;0;0)$. Точка O равноудалена от всех вершин верхнего основания призмы. Поэтому для нахождения значения h мы вправе рассмотреть расстояние от точки O до любой вершины верхнего основания призмы, в том числе и точки A_1. А это расстояние по условию задачи равно 9.

$\overline{OA_1} = \left(\overline{-3;-3\sqrt{3};h}\right)$; $\left|\overline{OA_1}\right| = \sqrt{9+27+h^2} = \sqrt{36+h^2}$.

$\sqrt{36+h^2} = 9 \Leftrightarrow 36+h^2 = 81 \Leftrightarrow h^2 = 45 \Leftrightarrow h = 3\sqrt{5}$. $\overline{AA_1} = \left(\overline{0;0;3\sqrt{5}}\right)$

Для упрощения дальнейших расчетов нормальный вектор плоскости A_1CB_1 с учетом значений m и h заменим ему коллинеарным вектором $\overline{n_1} = \left(\overline{\sqrt{5};-\sqrt{15};-6}\right)$

Если φ – угол между боковым ребром AA_1 и плоскостью A_1CB_1, то:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{AA_1}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{AA_1}\right|} = \frac{\left|\sqrt{5}\cdot 0 - \sqrt{15}\cdot 0 - 6\cdot 3\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5+15+36}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{6\cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{56}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{6}{2\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.\ \varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{14}}.$$