14 (С2) ТР № 200. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре BB_1 отмечена точка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ K так, что $BK : B_1K = 1:2.$ Через точку K параллельно (BDA_1) проведена плоскость β.

А) Докажите, что плоскость β пересекает ребро CD в такой точке M, что $CM = 2MD.$

Б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью β, ели известно, что $AB = 6,\ BC = 8,\ BB_1 = 12.$

Ответ: Б) $\dfrac{52\sqrt{29}}{3}$.

Решение:

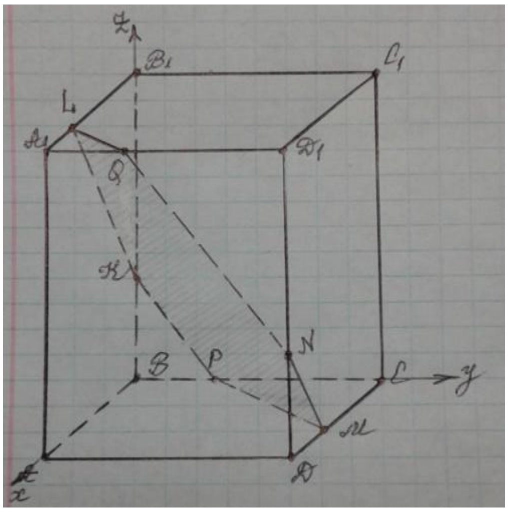

Рис. 1

А) Поместим заданный параллелепипед в декартову систему координат так, как показано на рис. 1. Пусть $AB = m,\ BC = n,\ CC_1 = 3h.$ Тогда: $B(0;0;0),\ K(0;0;h),\ D(m;n;0),\ A_1(m;0;3h).$ Найдем уравнение плоскости (BDA_1). Поскольку все координаты точки B равны нулю, то в уравнении (BDA_1) коэффициент d будет равным 0.

Решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ D \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} ma + 3hc = 0 \\ ma + nb = 0 \end{cases} \text{ при } c = 1.\ \ a = -\frac{3h}{m};$$

$m\cdot\left(-\dfrac{3h}{m}\right) + nb = 0$; $nb = 3h;$ $b = \dfrac{3h}{n}.$ Искомое уравнение выглядит так: $\dfrac{3h}{m}x - \dfrac{3h}{n}y - z = 0 \iff 3nhx - 3mhy - mnz = 0$. Нормальный вектор этой плоскости: $\overline{n} = \left(\overline{3nh;-3mh;-mn}\right)$. Ясно, что этот же вектор также будет служить нормальным вектором плоскости β, проходящей через точку K.

Следовательно, β имеет уравнение: $3nh(x-0) - 3mh(y-0) - mn(z-h) = 0 \iff$ $\iff 3nhx - 3mhy - mnz + mnh = 0.$ Точка M заведомо имеет координаты: $y_M = n,\ z_M = 0.$

$$3nhx_M - 3mnh + mnh = 0 \iff 3nhx_M = 2mnh \iff x_M = \frac{2m}{3},\ \text{ откуда: }\ CM = \frac{2m}{3};$$

$MD = \dfrac{m}{3};$ $CM = 2MD,$ что и требовалось доказать.

Б) По условию: $m = 6,\ n = 8,\ 3h = 12 \iff h = 4.$ Уравнение плоскости β:

$$96x - 72y - 48z + 192 = 0 \iff 4x - 3y - 2z + 8 = 0. \qquad M(4;8;0).$$

Найдем другие точки пересечения β с ребрами параллелепипеда.

Ребра параллелепипеда	Обозначение точки	Известны	Нахождение третьей координаты и точка пересечения с указанием всех трех координат
DD_1	N	$x_N = 6; y_N = 8$	$2z_N = 24 - 24 + 8 = 8;\ z_N = 4;\ N(6;8;4)$
BC	P	$x_P = 0; z_P = 0$	$y_P = 8/3;\quad P(0;8/3;0)$
A_1B_1	L	$y_L = 0; z_L = 12$	$4x_L = 24 - 8;\ x_L = 4;\ L(4;0;12)$
A_1D_1	Q	$x_Q = 6; z_Q = 12$	$3y_Q = 24 - 24 + 8;\ Q(6;8/3;12)$

Пусть $\varphi -$ угол между плоскостью β и нижним основанием параллелепипеда $z = 0$. Их нормальные векторы: $\overline{n_1} = \left(\overline{4;-3;-2}\right)$ и $\overline{n_2} = \left(\overline{0;0;1}\right)$ соответственно.

Тогда: $\cos\varphi = \dfrac{|4\cdot 0 - 3\cdot 0 - 2\cdot 1|}{\sqrt{16+9+4}\cdot\sqrt{0+0+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$. Обозначим проекции точек L, K, Q, N на плоскость нижнего основания параллелепипеда буквами L_1, K_1, Q_1, N_1 соответственно (рис.2).

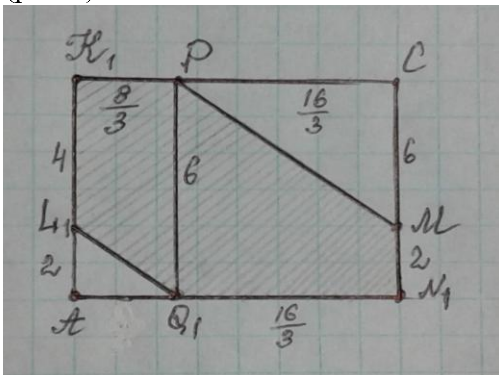

Рис. 2

Тогда $L_1K_1PMN_1Q_1$ – проекция сечения на нижнее основание параллелепипеда.

$$S(L_1K_1PMN_1Q_1) = \frac{PQ_1 + K_1L_1}{2}\cdot K_1P + \frac{PQ_1 + MN_1}{2}\cdot PC =$$
$$= \frac{5\cdot 8}{3} + \frac{4\cdot 16}{3} = \frac{40}{3} + \frac{64}{3} = \frac{104}{3}.$$

$$S_{\sec h} = \frac{104}{3} : \cos\varphi = \frac{104}{3}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{52\sqrt{29}}{3}.$$