Решения заданий из книги

Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2018.

40 тренировочных вариантов по демоверсии 2018 года.

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова,

издательства Легион.

Решение варианта 2

21. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби $\dfrac{(2x+1)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 1$. Если $x+4 \neq 0$ и $x-4 \neq 0$, уравнение равносильно следующему: $\dfrac{2x+1}{x+4} = 1$. Тогда $2x+1 = x+4,\ x = 3$.

Ответ: 3.

22. Автомобиль был в пути 6 часов, за это время он проехал $66 \cdot 2 + 88 \cdot 3 + 72 = 468$ км. Т.к. средняя скорость автомобиля равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t}$, где S — пройденный путь, t — время, затраченное на весь путь, то $v_{\text{ср}} = \dfrac{468}{6} = 78$ (км/ч).

Ответ: 78.

23. Преобразуем выражение:

$\dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{(x^2-4)(x^2-9)}{(x-2)(x+3)} = (x+2)(x-3)$ при $x \neq 2,\ x \neq -3$.

$y = (x+2)(x-3),\ y = x^2 - x - 6$ при $x \neq 2,\ x \neq -3$. $y(2) = -4,\ y(-3) = 6$.

График этой функции получается из параболы $y = x^2 - x - 6$ удалением точек $(2; -4)$, $(-3; 6)$. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $(0{,}5; -6{,}25)$ (см. рис. 1).

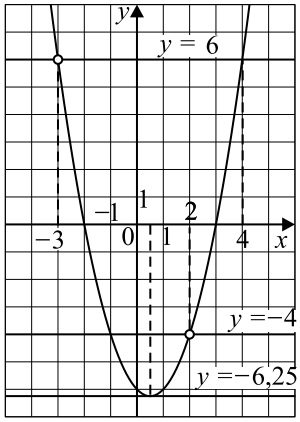


Рис. 1

По графику определяем, что прямая $y = a$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком ровно одну общую точку при $a = -6{,}25$ (ордината вершины параболы), $a = -4$ и $a = 6$ (ординаты удалённых точек).

Ответ: $-6{,}25;\ -4;\ 6$.

24. В соответствии с условием построим рисунок (см. рис. 2).

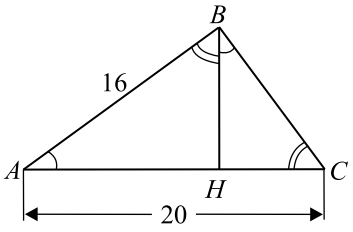


Рис. 2

1. $\triangle ABH \sim \triangle ABC$ по двум углам. Действительно, в них угол A — общий, и если $\angle A = \alpha^\circ$, то $\angle C = 90^\circ - \alpha^\circ$ и $\angle ABH = 90^\circ - \alpha^\circ$.

2. Из подобия следует, что $\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{AH}{16} = \frac{16}{20}$, $AH = \frac{16 \cdot 16}{20} = 12{,}8$. $AH = 12{,}8$.

Ответ: 12,8.

25. По условию (см. рис. 3) точка F — середина CD, значит, $CF = DF$; $BF = FA$ и по свойству параллелограмма $BC = AD$. Отсюда $\triangle BCF = \triangle ADF$ (по трем сторонам). Следовательно, $\angle BCF = \angle ADF$, но в сумме они составляют 180° (как углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне), значит, $\angle BCF = \angle ADF = 90^\circ$.

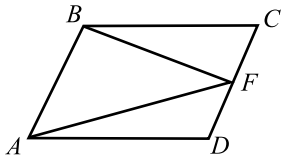


Рис. 3

Итак, $ABCD$ — прямоугольник.

26. Так как четырёхугольник $SKLM$ можно вписать в окружность (см. рис. 4), то $\angle LKM = \angle LSM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

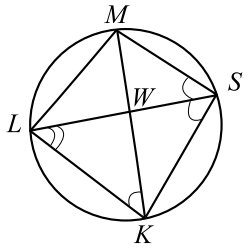


Рис. 4

По условию $\angle LSM = \angle LSK$, так как SL — биссектриса $\angle MSK$. Отсюда $\angle LKM = \angle LSK$.

Заметим, что $\triangle LKW \sim \triangle LSK$ по двум углам ($\angle L$ — общий, $\angle LKW = \angle LSK$), тогда $\frac{LS}{LK} = \frac{LK}{LW}$; $\frac{16 + SW}{20} = \frac{20}{16}$; $16(16 + SW) = 400$; $16 + SW = 25$; $SW = 9$.

Ответ: 9

Решение варианта 3

21. Преобразуем уравнение. $\frac{2 + 3x - 5x^2}{x^2} = 0$.

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю: $x^2 \neq 0, x \neq 0$.

$2 + 3x - 5x^2 = 0,\ 5x^2 - 3x - 2 = 0,$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{10},\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{2}{5}$.

Ответ: $1; -0{,}4$.

22. Первые 90 км автомобиль проехал за $90 : 45 = 2$ часа, следующие 240 км — за $240 : 60 = 4$ часа, последние 156 км — за $156 : 78 = 2$ часа. Таким образом, весь путь,

равный $90 + 240 + 156 = 486$ (км), автомобиль проехал за 8 часов. Тогда средняя скорость автомобиля равна $486 : 8 = 60{,}75$ (км/ч).

Ответ: 60,75 км/ч.

23. Преобразуем выражение:

$$1 - \frac{x+1}{x^2+x} = 1 - \frac{x+1}{x(x+1)} = 1 - \frac{1}{x} \text{ при } x \neq -1,\ x \neq 0.$$

$y = 1 - \dfrac{1}{x}$, при $x \neq -1$, $x \neq 0$. $y(-1) = 2$, $y(0)$ не определено.

График этой функции получается из гиперболы $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ удалением точки $(-1; 2)$. А гипербола $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ получается из гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ параллельным переносом вверх на одну единицу (см. рис. 5).

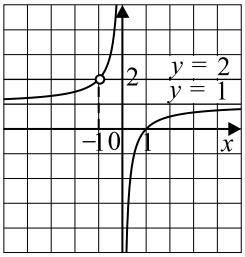


Рис. 5

По графику определяем, что прямая $y = n$, параллельная оси абсцисс, не имеет с графиком ни одной общей точки при $n = 1$ и $n = 2$.

Ответ: 1; 2.

24. В соответствии с условием построим рисунок (см. рис. 6).

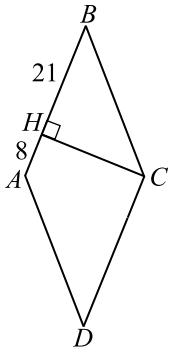


Рис. 6

1. Согласно условию, сторона ромба равна $8 + 21 = 29$. Поэтому $BC = 29$.

2. Треугольник CHB — прямоугольный. По теореме Пифагора получаем $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$, $CH = 20$.

Ответ: 20.

25. По условию (см. рис. 7) четырёхугольник $MNPQ$ вписан в окружность, значит, суммы его противоположных углов равны 180°. Тогда, к примеру, $\angle MNP + \angle MQP = 180°$. Но $\angle MNP$ и $\angle PNE$ — смежные и $\angle MNP + \angle PNE = 180°$; тогда $\angle MQP = \angle PNE$. Итак, $\triangle ENP \sim \triangle EQM$ по двум углам: $\triangle MEQ$ — общий для них и $\angle MQP = \angle PNE$.

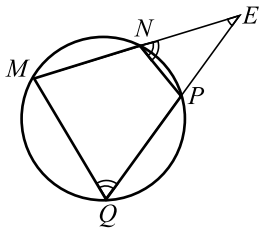


Рис. 7

26. Проведём $MH \perp AB$ и $MK \perp BC$, где точки H и K — основания перпендикуляров (см. рис. 8). Так как $BC \parallel AD$, то прямая MK перпендикулярна AD. Пусть N — точка пересечения прямых AD и MK.

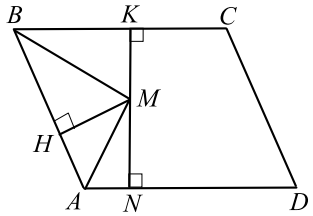


Рис. 8

Так как точка M лежит на биссектрисе угла B, то она равноудалена от его сторон, то есть $MK = MH = 6$. Аналогично, так как точка M лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от сторон угла A, то есть $MN = MH = 6$. $KN = MK + MN = 12$.

Площадь S параллелограмма найдём по формуле $S = BC \cdot KN = 15 \cdot 12 = 180$.

Ответ: 180.

Решение варианта 4

21. Преобразуем уравнение. $\dfrac{4 - 7x - 2x^2}{x^2} = 0.$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю: $x^2 \neq 0, x \neq 0$.

$4 - 7x - 2x^2 = 0,\ 2x^2 + 7x - 4 = 0,$

$x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 9}{4},\ x_1 = -4,\ x_2 = 0{,}5.$

Ответ: $-4; 0{,}5$.

22. Первые 146 км автомобиль проехал за $146 : 73 = 2$ часа, следующие 320 км — за $320 : 64 = 5$ часов, последние 182 км — за $182 : 91 = 2$ часа. Таким образом, весь путь, равный $146 + 320 + 182 = 648$ (км), автомобиль проехал за 9 часов. Тогда средняя скорость автомобиля равна $648 : 9 = 72$ (км/ч).

Ответ: 72.

23. Преобразуем выражение:

$1 - \dfrac{2x+1}{2x^2+x} = 1 - \dfrac{2x+1}{x(2x+1)} = 1 - \dfrac{1}{x}$ при $2x + 1 \neq 0$, то есть $x \neq -\dfrac{1}{2}$ и $x \neq 0$.

$y = 1 - \dfrac{1}{x}$, при $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $x \neq 0$.

$y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = 1 + 2 = 3$, $y(0)$ не определено.

График этой функции получается из гиперболы $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ удалением точки $\left(-\dfrac{1}{2}; 3\right)$. А гипербола $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ получается из гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ параллельным переносом вверх на одну единицу (см. рис. 9).

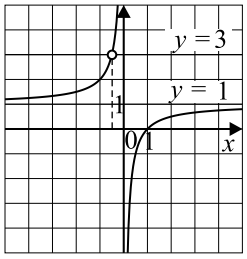


Рис. 9

По рисунку определяем, что прямая $y = n$, параллельная оси абсцисс, не имеет с графиком ни одной общей точки при $n = 3$ и $n = 1$.

Ответ: 1; 3.

24. В соответствии с условием построим рисунок (см. рис. 10).

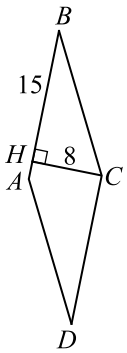


Рис. 10

1. По условию треугольник CHB — прямоугольный. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$.

2. Все стороны ромба равны между собой, поэтому $AB = BC = 17$. Отсюда $AB = AH + HB$, $AB = AH + 15$, $AH = AB - 15$, $AH = 17 - 15 = 2$, $AH = 2$.

Ответ: 2.

25. По условию (см. рис. 11) четырёхугольник $MNPQ$ вписан в окружность, значит, суммы его противоположных углов равны 180°. Тогда, к примеру, $\angle MQP + \angle MNP = 180°$. Но $\angle MNP$ и $\angle MNF$ — смежные и $\angle MNP + \angle MNF = 180°$; тогда $\angle MQP = \angle MNF$. Итак, $\triangle MFN$ подобен $\triangle QFP$ по двум углам: $\angle MFN$ — общий для них и $\angle MNF = \angle MQP$.

26. Проведём $PH \perp KL$ и $PQ \perp LM$, где точки H и Q — основания перпендикуляров (см. рис. 12). Так как $LM \parallel KN$, то прямая PQ перпендикулярна KN. Пусть T — точка пересечения прямых KN и PQ.

Так как точка P лежит на биссектрисе угла L, то она равноудалена от его сторон, то есть $PQ = PH = 7$. Аналогично, так как точка P лежит на биссектрисе угла K, то она равноудалена от сторон угла K, то есть $PT = PH = 7$. $QT = PQ + PT = 14$.

Площадь S параллелограмма найдём по формуле $S = LM \cdot QT = 20 \cdot 14 = 280$.

Ответ: 280.

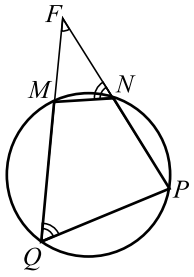


Рис. 11

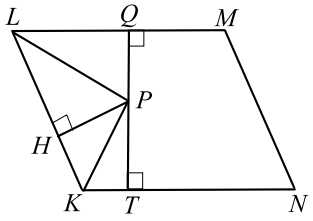


Рис. 12

Решение варианта 6

21. $\dfrac{40^{n+5}}{2^{3n+11}\cdot 5^{n+4}} = \dfrac{(2^3\cdot 5)^{n+5}}{2^{3n+11}\cdot 5^{n+4}} = \dfrac{2^{3n+15}\cdot 5^{n+5}}{2^{3n+11}\cdot 5^{n+4}} = 2^{3n+15-(3n+11)}\cdot 5^{n+5-(n+4)} = 2^4\cdot 5^1 = 80.$

Ответ: 80.

22. Скорость поезда равна 90 км/ч$= \dfrac{90000}{3600} = \dfrac{900}{36} = 25$ (м/с). За 10 секунд поезд проезжает расстояние, равное своей длине: $25\cdot 10 = 250$ (м).

Ответ: 250.

23. Преобразуем выражение:

$1 - \dfrac{x^4+2x^3}{4x+2x^2} = 1 - \dfrac{x^3(x+2)}{2x(x+2)} = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при условии $x \neq 0,\ x \neq -2.$

$y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x \neq 0, x \neq -2$. $y(-2) = 1 - \dfrac{4}{2} = -1$, $y(0) = 1$.

График этой функции получается из параболы $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ удалением точек $(0;1)$ и $(-2;-1)$. Ветви параболы направлены вниз, вершиной является точка $(0;1)$. (см. рис. 13).

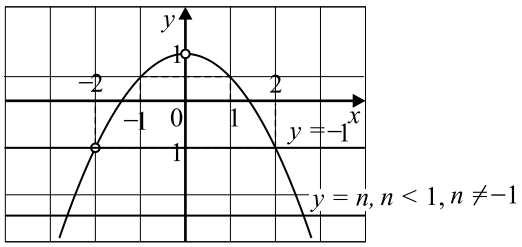


Рис. 13

По рисунку определяем, что прямая $y = n$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком две общие точки при $n \in (-\infty;-1)\cup(-1;1)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$.

24. 1. Построим равнобедренный треугольник ABC и опустим перпендикуляр OH из точки O на сторону BC (см. рис. 14). По условию $OH = 14$. $OC = \dfrac{1}{2}AC = 28$.

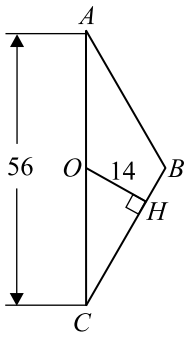


Рис. 14

2. В прямоугольном треугольнике COH катет OH равен половине гипотенузы OC. Действительно, $OH = 14$, а $OC = 28$. Тогда $\angle HCO = 30°$.

3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle OAB = 30°$. Учитывая, что сумма внутренних углов треугольника равна $180°$, получаем $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$.

Ответ: 120; 30; 30.

25. В трапеции основания параллельны.

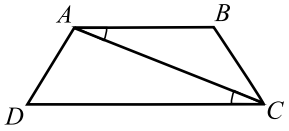


Рис. 15

$\angle BAC = \angle DCA$ — как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей AC (см. рис. 15).

Рассмотрим стороны, образующие эти углы, а именно AB и AC, AC и DC, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{1}{2}$. Отсюда, на основании второго признака подобия треугольников, треугольники ABC и ACD подобны.

26. Заметим, что трапеция $KLMN$ прямоугольна, так как боковая сторона перпендикулярна основанию. Пусть P — точка пересечения прямых KL и MN (см. рис. 16). Пусть $SG \perp MN$, точка G лежит на прямой MN.

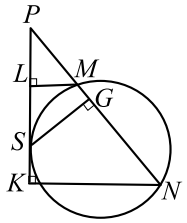


Рис. 16

Тогда $\triangle PLM$, $\triangle PSG$ и $\triangle PKN$ — прямоугольные с общими углом P. $LM = PM \sin\angle P$, $KN = PN \sin\angle P$, $SG = PS \sin\angle P$.

По теореме об отрезках касательной и секущей $PS^2 = PM \cdot PN$.
Тогда $SG^2 = PS^2 \sin^2\angle P = PM \cdot PN \cdot \sin^2\angle P =$
$= (PM \sin\angle P) \cdot (PN \sin\angle P) = LM \cdot KN = 10 \cdot 50 = 500$. $SG = 10\sqrt{5}$.

Ответ: $10\sqrt{5}$.

Решение варианта 7

21. $\dfrac{(3y)^3 \cdot y^{-10}}{y^{-12} \cdot 2y^5} = \dfrac{27y^{3-10}}{2y^{-12+5}} = \dfrac{27y^{-7}}{2y^{-7}} = \dfrac{27}{2} = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

22. Длина поезда равна сумме скоростей поезда и пешехода, умноженной на время движения поезда мимо пешехода:

$(77+4) \cdot \dfrac{8}{3600} = 81 \cdot \dfrac{1}{450} = 0{,}18\,(\text{км}) = 180$ м.

Ответ: 180.

23. Преобразуем выражение:

$$\frac{(x+1)(x^2+7x+10)}{x+2}.$$

Разложим квадратный трёхчлен $x^2+7x+10$ на линейные множители.

$x^2+7x+10=0.$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{-7 \pm 3}{2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = -5$.

$x^2+7x+10 = (x+5)(x+2).$

$y = \dfrac{(x+1)(x+5)(x+2)}{x+2} = (x+1)(x+5)$, $y = x^2+6x+5$. при $x \neq -2$. $y(-2) = -3$.

График этой функции получается из параболы $y = x^2+6x+5$ удалением точки $(-2;-3)$. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $(-3;-4)$. (см. рис. 17).

По рисунку определяем, что прямая $y = m$, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней, имеет с графиком ровно одну общую точку при $m = -3$ и $m = -4$ (см. рис. 17).

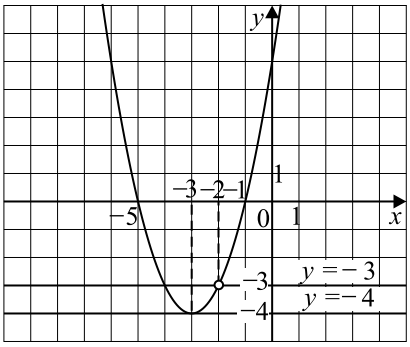


Рис. 17

Ответ: -4; -3.

24. 1. Построим трапецию $ABCD$ и впишем в неё окружность (см. рис. 18). Отметим, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Поэтому, сумма оснований равна 20.

2. Сумма боковых сторон равна сумме оснований по свойству описанного четырёхугольника. Отсюда и получим, что сумма боковых сторон равна 20.

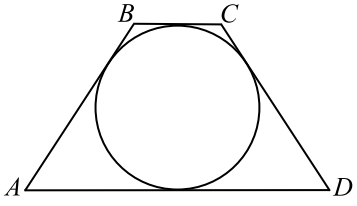


Рис. 18

Ответ: 20.

25. $\triangle NKM_1 \sim \triangle MKN_1$ по двум углам ($\angle NKM_1 = \angle N_1KM$ как вертикальные, $\angle NM_1K = \angle MN_1K = 90^\circ$) (см. рис. 19).

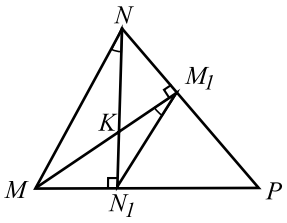


Рис. 19

Из подобия треугольников следует $\frac{NK}{MK} = \frac{NM_1}{MN_1} = \frac{KM_1}{KN_1}$.

$\triangle MNK \sim \triangle KM_1N_1$ по второму признаку $\Big($ $\angle NKM = \angle M_1KN_1$ как вертикальные и $\frac{NK}{M_1K} = \frac{MK}{KN_1}\Big)$.

Из подобия треугольников MNK и KM_1N_1 следует $\angle MM_1N_1 = \angle MNN_1$.

26. Проведём окружность с диаметром BC (см. рис. 20). Продолжим высоту AL до второй точки пересечения с окружностью — точки K. Тогда $KL = QL = 10$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам), $QK = 10 + 10 = 20$, $AQ = AL - QL = 6$, $AK = 20 + 6 = 26$.

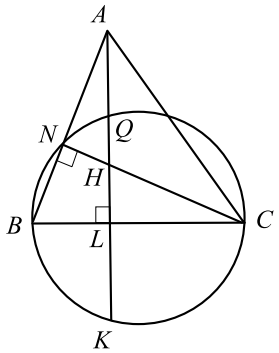


Рис. 20

Пусть N — точка пересечения окружности со стороной AB. Проведём CN. Заметим, что $\angle CNB$ — вписанный, который опирается на диаметр, поэтому $\angle CNB = 90^\circ$, то есть CN — высота $\triangle ABC$. Следовательно, CN пересекает AL в точке H — точке пересечения высот.

По свойству отрезков секущих $AN \cdot AB = AQ \cdot AK$, $AN \cdot AB = 6 \cdot 26 = 156$.

Заметим, что $\triangle ANH \sim \triangle ABL$ по двум углам ($\angle ANH = \angle ALB = 90^\circ$, $\angle A$ — общий). Следовательно, $\frac{AH}{AB} = \frac{AN}{AL}$. Отсюда $AH = \frac{AN \cdot AB}{AL} = \frac{156}{16} = 9{,}75$.

Ответ: 9,75.

Решение варианта 8

21. $\frac{(6y)^2 \cdot y^{-8}}{15y^3 \cdot y^{-9}} = \frac{36y^{2-8}}{15y^{3-9}} = \frac{36y^{-6}}{15y^{-6}} = \frac{36}{15} = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

22. Длина поезда равна сумме скоростей поезда и пешехода, умноженной на время движения поезда мимо пешехода:

$(59+4)\cdot\dfrac{12}{3600}=63\cdot\dfrac{1}{300}=0{,}21$ (км)$=210$ м.

Ответ: 210.

23. Преобразуем выражение:

$$\frac{(x+2)(x^2+5x+4)}{x+4}.$$

Разложим квадратный трёхчлен x^2+5x+4 на линейные множители.

$x^2+5x+4=0$.

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{-5\pm3}{2}$, $x_1=-4$, $x_2=-1$.

$x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$.

$y=\dfrac{(x+2)(x+4)(x+1)}{x+4}=(x+2)(x+1)$, $y=x^2+3x+2$. при $x\neq-4$. $y(-4)=6$.

График этой функции получается из параболы $y=x^2+3x+2$ удалением точки $(-4;6)$. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$.

(см. рис. 21).

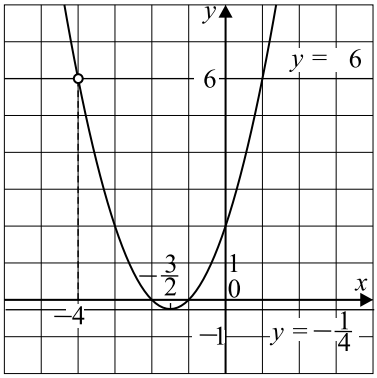


Рис. 21

По рисунку определяем, что прямая $y=m$, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней, имеет с графиком ровно одну общую точку при $m=6$ и $m=-\dfrac{1}{4}$ или $m=-0{,}25$.

Ответ: $-0{,}25$; 6.

24. 1. Построим трапецию $ABCD$ и впишем в неё окружность (см. рис. 22). Отметим, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

2. По свойству описанного четырёхугольника сумма оснований равна сумме боковых сторон. Отсюда и получим, что средняя линия равна $\dfrac{1}{2}\cdot18=9$.

Ответ: 9

25. $\triangle MFP_1\sim\triangle PFM_1$ по двум углам ($\angle MFP_1=\angle PFM_1$ как вертикальные, $\angle MP_1F=\angle PM_1F=90^\circ$) (см. рис. 23).

Из подобия треугольников следует $\dfrac{MF}{PF}=\dfrac{P_1F}{M_1F}=\dfrac{MP_1}{PM_1}$.

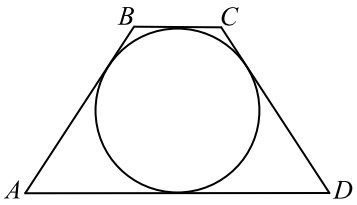


Рис. 22

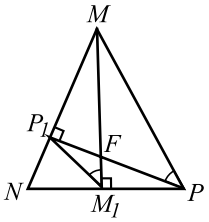


Рис. 23

Рассмотрим соотношения: $\frac{MF}{PF} = \frac{P_1F}{M_1F}$ и $\angle MFP = \angle P_1FM_1$ (как вертикальные), получим, что $\triangle MFP \sim \triangle P_1FM_1$ по второму признаку подобия.

Из этого следует, что $\angle MM_1P_1 = \angle MPF$.

26. Проведём окружность с диаметром BC (см. рис. 24). Продолжим высоту AL до второй точки пересечения с окружностью — точки K. Тогда $KL = QL = 15$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам), $QK = 15 + 15 = 30$, $AQ = AL - QL = 10$, $AK = 10 + 30 = 40$.

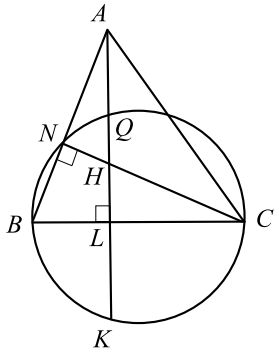


Рис. 24

Пусть N — точка пересечения окружности со стороной AB. Проведём CN. Заметим, что $\angle CNB$ — вписанный, который опирается на диаметр, поэтому $\angle CNB = 90°$, то есть CN — высота $\triangle ABC$. Следовательно, CN пересекает AL в точке H — точке пересечения высот.

По свойству отрезков секущих $AN \cdot AB = AQ \cdot AK$, $AN \cdot AB = 10 \cdot 40 = 400$.

Заметим, что $\triangle ANH \sim \triangle ABL$ по двум углам ($\angle ANH = \angle ALB = 90°$, $\angle A$ — общий). Следовательно, $\frac{AH}{AB} = \frac{AN}{AL}$. Отсюда $AH = \frac{AN \cdot AB}{AL} = \frac{400}{25} = 16$.

Ответ: 16.

Решение варианта 10

21. Разложим на множители левую часть уравнения, применив группировку.
$x^2(x-2) - 9(x-2) = 0$; $(x^2-9)(x-2) = 0$; $(x-3)(x+3)(x-2) = 0$. Произведение

равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.
$x-3=0,\ x=3; x+3=0,\ x=-3; x-2=0,\ x=2.$

Ответ: $-3; 3; 2$.

22. Длина поезда равна разности скоростей поезда и пешехода, умноженной на время движения поезда мимо пешехода:

$$(77-5)\cdot\frac{11}{3600}=\frac{72\cdot 11}{3600}=0{,}22 \text{ км} = 220 \text{ м}.$$

Ответ: 220.

23. Построим сначала график функции $y=x^2-x-6$. Её графиком является парабола с вершиной $(x_0; y_0)$, где $x_0=-\dfrac{-1}{2}=0{,}5$, $y_0=y(0{,}5)=-6{,}25$. Её ветви направлены вверх.

Отметим, что $y=0$ при $x_1=-2$, $x_2=3$.

Точки графика этой функции с отрицательными ординатами изображены пунктирной линией (см. рис. 25).

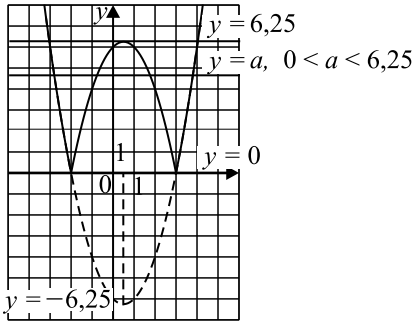


Рис. 25

Далее, чтобы построить график функции $y=|x^2-x-6|$, отразим относительно прямой Ox ту часть параболы $y=x^2-x-6$, которая лежит ниже оси абсцисс и изображена пунктирной линией. Получим искомый график (сплошная линия) (см. рис. 25).

Решим вторую часть задачи. По рисунку определяем, что прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком две, три или четыре общие точки. Наибольшее число общих точек — четыре.

Ответ: 4.

24. Согласно условию, проведём параллельные прямые, отложим отрезки AB на одной прямой и CD — на другой (см. рис. 26).

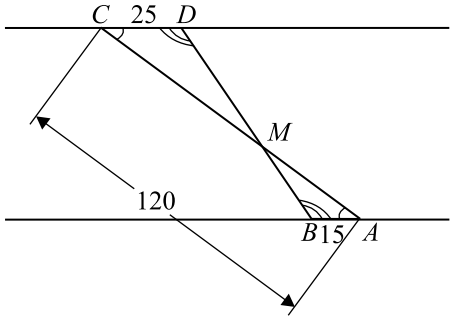


Рис. 26

1. Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых равны, поэтому $\angle MAB=\angle MCD$ и $\angle ABM=\angle MDC$. Отсюда следует, что треугольники MAB и MCD подобны (по двум углам).

2. Из подобия треугольников следует равенство отношений сторон, лежащих против равных углов:

$\frac{AB}{DC} = \frac{AM}{MC}$, $\frac{AM}{MC} = \frac{AC - MC}{MC} = \frac{AC}{MC} - 1$.

Следовательно, $\frac{AC}{MC} = \frac{15}{25} + 1 = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$.

Получаем $\frac{120}{MC} = \frac{8}{5}$, $MC = \frac{5 \cdot 120}{8} = \frac{600}{8} = 75$, $MC = 75$.

Ответ: 75

25. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK$, где BK — высота трапеции (см. рис. 27). Проведём $TP \perp AD$ через точку M. Так как по условию $CM = MD$, можно доказать, что $\triangle CPM = \triangle DTM$ и $PM = MT = \frac{PT}{2} = \frac{BK}{2}$.

$$S_{BMA} = S_{ABCD} - (S_{BCM} + S_{AMD}) = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK -$$

$$- \left(\frac{1}{2}BC \cdot \frac{BK}{2} + \frac{1}{2}AD \cdot \frac{BK}{2}\right) = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK - \frac{1}{4}(BC + AD) \cdot BK =$$

$$= \frac{1}{4}(BC + AD) \cdot BK = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

$S_{BMA} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

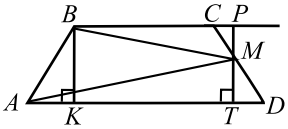


Рис. 27

26. Пусть AL, BM и CT — биссектрисы треугольника ABC, K — их точка пересечения. Предположим, что $AK : KL = 18 : 5$, $CB = 55$ (см. рис. 28).

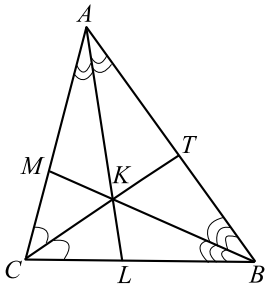


Рис. 28

Рассмотрим $\triangle ACL$, CK — его биссектриса, тогда по свойству биссектрисы $AC : CL = AK : KL = 18 : 5$. Пусть $CL = 5x$, тогда $AC = 18x$.

Рассмотрим $\triangle ABL$, BK — его биссектриса, тогда по свойству биссектрисы $AB : BL = AK : KL = 18 : 5$. Пусть $BL = 5y$, тогда $AB = 18y$.

$CB = 55$. С другой стороны $CB = CL + BL = 5x + 5y$. Отсюда $x + y = 11$.

Периметр треугольника ABC равен $18x + (5x + 5y) + 18y = 23(x + y) = 23 \cdot 11 = 253$.

Ответ: 253.

Решение варианта 11

21. $(x + 6)^2(x - 7) - 14(x + 6) = 0$. Вынесем за скобку общий множитель: $(x + 6)((x + 6)(x - 7) - 14) = 0$, $(x + 6)(x^2 - x - 56) = 0$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

$x + 6 = 0,\ x = -6$;

$x^2 - x - 56 = 0, x_1 = -7, x_2 = 8$.

Ответ: $-7; -6; 8$.

22. Если считать, что пассажирский поезд неподвижен, то товарный относительно него движется со скоростью $62 - 38 = 24$ (км/ч) $= \dfrac{24000}{60}$ м/мин $= 400$ м/мин. За четыре минуты он пройдёт $400 \cdot 4 = 1600$ (м). Это расстояние равно сумме длин пассажирского и товарного поездов. Тогда длина пассажирского поезда равна $1600 - 900 = 700$ (м).

Ответ: 700.

23. Построим сначала график функции $y = x^2 - 4|x| + 1$. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и $y = x^2 - 4x + 1$ при $x \geqslant 0$. График этой функции получается из параболы $y = x^2 - 4x + 1$ удалением всех её точек с отрицательными абсциссами. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $(2; -3)$ (см. рис. 29).

Для построения графика функции $y = x^2 - 4|x| + 1$ при $x < 0$ отметим, что её значения не зависят от знака аргумента. Действительно,

$y(-x) = (-x)^2 - 4|-x| + 1 = x^2 - 4|x| + 1 = y(x)$.

Поэтому график функции $y = x^2 - 4|x| + 1$ симметричен относительно оси ординат и точки графика функции $y = x^2 - 4|x| + 1$ при $x < 0$ получаются симметричным отображением относительно оси ординат точек графика $y = x^2 - 4|x| + 1$ при $x \geqslant 0$. Отобразим указанную выше часть графика $y = x^2 - 4|x| + 1$ при $x \geqslant 0$ относительно оси ординат и объединим полученные графики (см. рис. 29). Получим искомый график.

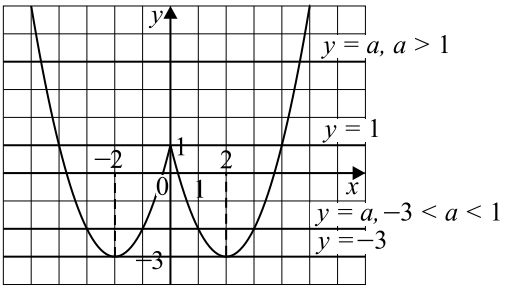


Рис. 29

По рисунку определяем, что прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком две, три или четыре общие точки. Наибольшее число общих точек — четыре.

Ответ: 4.

24. Согласно условию, построим равнобедренный треугольник ABC и проведём медиану BH к основанию AC и в треугольнике BHC проведём медиану HT (см. рис. 30).

1. Медиана HT треугольника BHC является средней линией треугольника ABC, параллельной AB, поэтому $HT = \dfrac{1}{2} \cdot AB$, $AB = 2HT = 2 \cdot 6,5 = 13$, $AB = 13$.

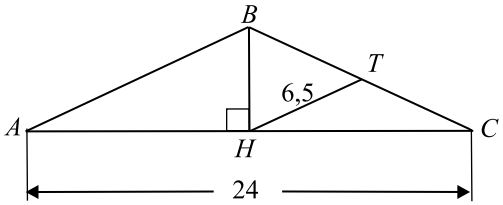


Рис. 30

2. Медиана BH равнобедренного треугольника ABC является высотой, поэтому треугольник ABH является прямоугольным с прямым углом H.

Точка H является серединой отрезка AC, поэтому $AH = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$, $AH = 12$.

По теореме Пифагора для треугольника ABH получаем

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

25. $S_{MEN} = \frac{1}{2} MN \cdot EK$, где EK — высота треугольника MEN (см. рис. 31).

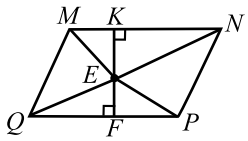


Рис. 31

$S_{QEP} = \frac{1}{2} QP \cdot EF$, где EF — высота треугольника QEP.

Проведём $KF \perp MN$ через точку E.

$EK + EF = KF$ — высота параллелограмма $MNPQ$. $S_{MNPQ} = MN \cdot KF$.

$MN = QP$ — как противоположные стороны параллелограмма.

Учитывая это, $S_{MEN} + S_{QEP} = \frac{1}{2}(MN \cdot EK + MN \cdot EF) =$

$= \frac{1}{2} MN \cdot (EK + EF) = \frac{1}{2} MN \cdot KF = \frac{1}{2} S_{MNPQ}$.

26. Заметим, что $\triangle BCP \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle ACB = \angle BPC = 90°$).

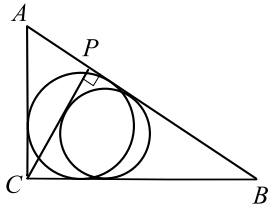


Рис. 32

Радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники, относятся так же, как и стороны подобных треугольников. Найдём коэффициент подобия как отношение гипоте-

нуз: $\frac{AB}{CB}$. Пусть $AC = x$. Тогда $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\angle A = \frac{12}{5}$. Следовательно, $BC = \frac{12}{5}x$ и по теореме Пифагора $AB^2 = x^2 + \frac{144}{25}x^2 = \frac{169}{25}x^2$, $AB = \frac{13}{5}x$. Значит, $\frac{AB}{CB} = \frac{\frac{13}{5}x}{\frac{12}{5}x} = \frac{13}{12}$.

Таким образом, искомый радиус равен $\frac{13}{12} \cdot 48 = 52$.

Ответ: 52.

Решение варианта 12

21. $(x-3)^2(x+7) - 24(x-3) = 0$. Вынесем за скобку общий множитель: $(x-3)((x-3)(x+7)-24) = 0$, $(x-3)(x^2+4x-45) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.
$x - 3 = 0,\ x = 3;$
$x^2 + 4x - 45 = 0, x_1 = -9, x_2 = 5.$

Ответ: $-9; 3; 5$.

22. Если считать, что пассажирский поезд неподвижен, то товарный относительно него движется со скоростью $65 - 41 = 24$ (км/ч) $= \frac{24000}{60}$ м/мин $= 400$ м/мин. За три минуты он пройдёт $400 \cdot 3 = 1200$ (м). Это расстояние равно сумме длин пассажирского и товарного поездов. Тогда длина пассажирского поезда равна $1200 - 700 = 500$ (м).

Ответ: 500.

23. Построим сначала график функции $y = x^2 - 8|x| + 7$. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и $y = x^2 - 8x + 7$ при $x \geqslant 0$. График этой функции получается из параболы $y = x^2 - 8x + 7$ удалением всех её точек с отрицательными абсциссами. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $(4; -9)$ (см. рис. 33).

Для построения графика функции $y = x^2 - 8|x| + 7$ при $x < 0$ отметим, что её значения не зависят от знака аргумента. Действительно,

$y(-x) = (-x)^2 - 8|-x| + 7 = x^2 - 8|x| + 7 = y(x)$.

Поэтому график функции $y = x^2 - 8|x| + 7$ симметричен относительно оси ординат и точки графика функции $y = x^2 - 8|x| + 7$ при $x < 0$ получаются симметричным отображением относительно оси ординат точек графика $y = x^2 - 8|x| + 7$ при $x \geqslant 0$. Отобразим указанную выше часть графика $y = x^2 - 8|x| + 7$ при $x \geqslant 0$ относительно оси ординат и объединим полученные графики (см. рис. 33). Получим искомый график.

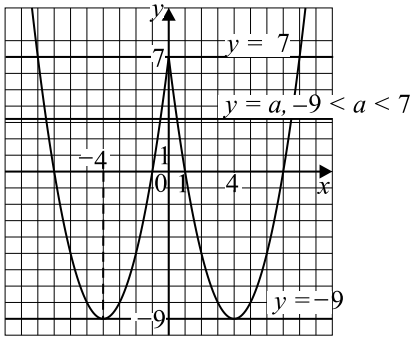


Рис. 33

По рисунку определяем, что прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком две, три или четыре общие точки. Наибольшее число общих точек — четыре.

Ответ: 4.

24. Согласно условию, построим равнобедренный треугольник ABC и проведём медиану BH к основанию AC и в треугольнике BHC проведём медиану HT (см. рис. 34).

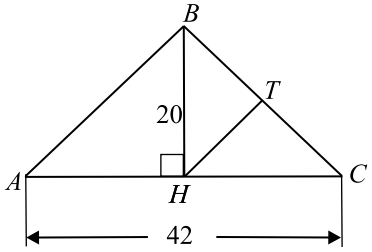


Рис. 34

1. Медиана HT треугольника BHC является средней линией треугольника ABC, параллельной AB, поэтому $HT = \frac{1}{2} \cdot AB$.

2. Медиана BH равнобедренного треугольника ABC является высотой, поэтому треугольник ABH является прямоугольным с прямым углом H.

Точка H является серединой отрезка AC, поэтому $AH = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$. По теореме Пифагора для треугольника ABH получаем

$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29$, $AB = 29$.

Значит $HT = \frac{1}{2} \cdot 29 = 14,5$.

Ответ: 14,5.

25. $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot ME$, где ME — высота треугольника ABM (см. рис. 35). Проведём через точку M высоту $MK \perp DC$.

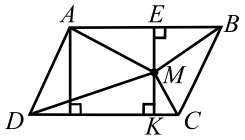


Рис. 35

$S_{CMD} = \frac{1}{2} CD \cdot MK$, где MK — высота треугольника CMD.

$EM + MK = EK$ — высота параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AB \cdot EK$.

$AB = DC$ — как противоположные стороны параллелограмма

$$S_{AMB} + S_{CMD} = \frac{1}{2} AB \cdot ME + \frac{1}{2} CD \cdot MK = \frac{1}{2} AB(ME + MK) =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot EK = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

26. Заметим, что $\triangle ACT \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ATC = 90°$).

Радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники, относятся так же, как и стороны подобных треугольников. Найдём коэффициент подобия как отношение гипоте-

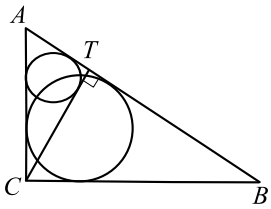


Рис. 36

нуз: $\frac{AB}{AC}$. Пусть $AC = x$. Тогда $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\angle A = \frac{15}{8}$. Следовательно, $BC = \frac{15}{8}x$ и по теореме Пифагора $AB^2 = x^2 + \frac{225}{64}x^2 = \frac{289}{64}x^2$, $AB = \frac{17}{8}x$. Значит, $\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{17}{8}x}{x} = \frac{17}{8}$.

Таким образом, искомый радиус равен $\frac{17}{8} \cdot 160 = 340$.

Ответ: 340.

Решение варианта 14

21. Пусть $(5x-1)^2 = t$, тогда $t^2 + t - 20 = 0$.

$t_{1;2} = \frac{-1 \pm 9}{2}, t_1 = 4;\ t_2 = -5$.

$(5x-1)^2 = -5$, решений нет.

$(5x-1)^2 = 4,\ 5x-1 = 2, x = 0{,}6$ или $5x-1 = -2,\ x = -0{,}2$.

Ответ: 0,6; −0,2.

22. Пусть возраст Толи — x лет, тогда его папе $3x$ лет, а дедушке $(3x + 23)$ года. Так как в сумме возраст Толи, его папы и дедушки составляет 121 год, то верно равенство $x + 3x + (3x + 23) = 121$, откуда $7x = 98$, $x = 14$. Итак, Толе 14 лет, дедушке $3 \cdot 14 + 23 = 65$ лет. Дедушка старше Толи на $65 - 14 = 51$ год.

Ответ: 51.

23. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

$x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$; $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.

$x^2 + 6x + 8 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$; $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$.

$x^2 + x - 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -4$; $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$.

$\frac{(x-3)(x-4)(x+2)(x+4)}{(x-3)(x+4)} = (x-4)(x+2)$, $x \neq 3$, $x \neq -4$.

$y = x^2 - 2x - 8$ при условии $x \neq 3$, $x \neq -4$. $y(3) = -5$, $y(-4) = 16$.

График этой функции получается из параболы $y = x^2 - 2x - 8$ удалением точек $(3; -5)$ и $(-4; 16)$. Ветви параболы направлены вверх, вершиной является точка $(1; -9)$. (см. рис. 37).

По рисунку определяем, что прямая $y = a$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $a = -9$; $a = -5$; $a = 16$.

Ответ: −9; −5; 16.

24. Согласно условию, проведём окружность с центром O и впишем в неё треугольник ABC (см. рис. 38).

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Поэтому $\angle C = 180° - 76° - 59° = 45°$.

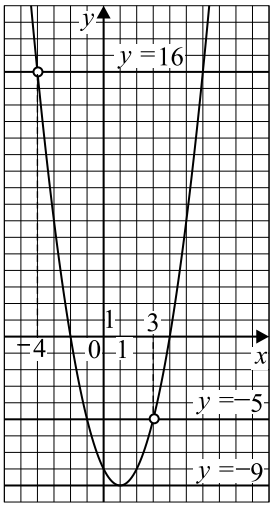


Рис. 37

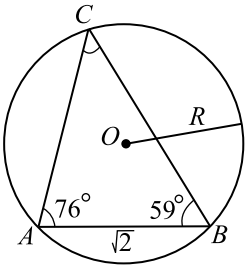


Рис. 38

2. По теореме синусов, отношение стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности. Получим

$\dfrac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$, поэтому $R = 1$.

Ответ: 1.

25. $S_{MNP} = \dfrac{1}{2} MN \cdot NP$ (см. рис. 39).

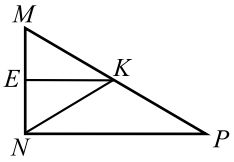


Рис. 39

$S_{MNK} = \dfrac{1}{2} MN \cdot EK$, где EK — высота $\triangle MNK$.

NK — медиана $\triangle MNP$, $NK = \dfrac{1}{2} MP$, следовательно, $NK = MK$.

$\triangle MNK$ — равнобедренный и EK — высота, значит EK и медиана. $ME = EN$. $\triangle MEK \sim \triangle MNP$ по двум углам ($\angle NMP$ — общий, $\angle MEK = \angle MNP = 90^\circ$). $EK = \dfrac{1}{2} NP$.

$S_{MNK} = \frac{1}{2}MN \cdot \frac{1}{2}NP = \frac{1}{4}MN \cdot NP.$

$S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNP}.$

26. Точку пересечения BQ и AT обозначим K (см. рис. 40),

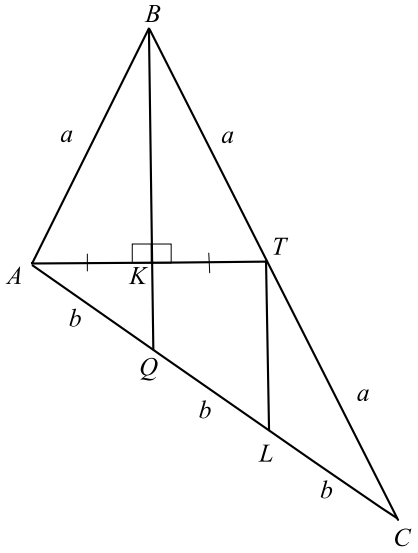


Рис. 40

Тогда из условия перпендикулярности AT и BQ следует, что $\angle AKB = \angle BKT = 90°$. Следовательно, $\triangle ABK = \triangle BKT$ по катету и острому углу (BK — общая сторона, $\angle ABK = \angle TBK$, так как BQ — биссектриса $\angle B$). Следовательно, $AK = KT = \frac{AT}{2} = 5$. $AB = BT$. С другой стороны, $CT = BT$, так как AT — медиана $\triangle ABC$. Обозначим длину AB буквой a. Тогда $AB = BT = TC = a$.

Пусть $AQ = b$. По свойству биссектрисы $AB : BC = AQ : QC$. Тогда $\frac{a}{2a} = \frac{b}{QC}$. Отсюда $QC = 2b$. Пусть L — середина QC. Тогда $QL = LC = b$.

Заметим, что TL — средняя линия $\triangle CBQ$. Следовательно, $TL = \frac{1}{2}BQ = 8$.

Далее, $AK = KT$, $AQ = QL$ и поэтому QK — средняя линия $\triangle ATL$. Тогда $QK = \frac{1}{2}TL = 4$. $BK = BQ - KQ = 16 - 4 = 12$.

Из $\triangle AKB$ по теореме Пифагора $AB^2 = AK^2 + KB^2 = 5^2 + 12^2 = 169$. $AB = 13$, $a = 13$.

Из $\triangle AKQ$ по теореме Пифагора $AQ^2 = AK^2 + KQ^2 = 5^2 + 4^2 = 41$. $AQ = \sqrt{41}$, $b = \sqrt{41}$.

Найдём стороны треугольника ABC. $AB = a = 13$, $BC = 2a = 26$, $AC = 3b = 3\sqrt{41}$.

Ответ: $13, 26, 3\sqrt{41}$.

Решение варианта 15

21. Найдем область допустимых значений уравнения: $11 - 2x \geqslant 0,\ x \leqslant 5{,}5$.

Упростим уравнение: $x^2 - 11x + 30 = 0$. Тогда $x_1 = 5,\ x_2 = 6$. Учитывая ОДЗ, $x = 5$ — корень уравнения.

Ответ: 5.

22. По условию время стоянки катера равно 2 часам, время движения катера (против течения реки и по течению реки) составляет $11 - 7 - 2 = 2$ часа. Скорость катера против течения равна 6 км/ч, по течению — 10 км /ч. Пусть x км — расстояние, на которое отплыл катер, $\frac{x}{6}$ ч и $\frac{x}{10}$ ч время, затраченное катером на путь против течения и по течению, соответственно. Тогда $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} = 2;\ 8 \cdot x = 60$, откуда $x = 7,5$ (км).

Ответ: 7,5.

23. При $x > 2$ графиком является часть параболы $y = x^2 - x - 6$. Ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины равна 0,5. Так как $0,5 < 2$, то графиком будет часть правой ветви параболы $y = x^2 - x - 6$. Отметим, что $y(2) = -4$.

Поэтому функция $y = x^2 - x - 6$ возрастает от -4 до $+\infty$. При этом точка $(2; -4)$ не принадлежит графику (см. рис. 41).

При $x \leqslant 2$ график является частью прямой $y = \frac{x}{2}$, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; 1)$, содержащей точку $(2; 1)$. Эта часть прямой будет лучом с началом в точке $(2; 1)$ (см. рис. 41).

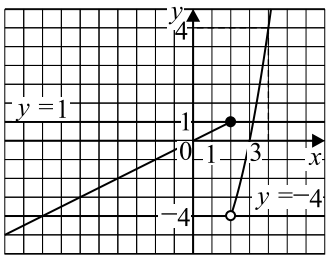


Рис. 41

По графику определяем, что ровно две общие точки прямая $y = p$ имеет с графиком при $-4 < p \leqslant 1$. Значит, $p \in (-4; 1]$.

Ответ: $(-4; 1]$.

24. Согласно условию, построим трапецию $ABCD$ и проведём прямую EF параллельную основаниям BC и AD и делящую CD в отношении $2 : 3$ (см. рис. 42). Проведём через точку C прямую, параллельную AB. Точки пересечения с прямыми EF и AD обозначим соответственно через K и L.

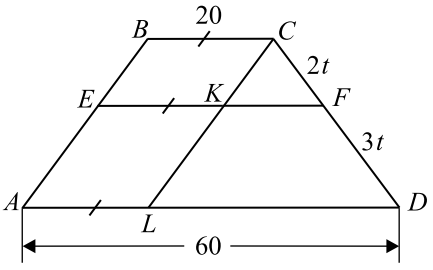


Рис. 42

Тогда $BC = EK = AL = 20$, $LD = 60 - 20 = 40$ и $\triangle LCD \sim \triangle KCF$ (по двум углам: $\angle CKF = \angle CLD$ и $\angle CFK = \angle CDL$).

2. Из подобия треугольников получаем $\frac{LD}{KF} = \frac{DC}{FC}$, $\frac{40}{KF} = \frac{5t}{2t}$. Действительно, DC содержит 5 одинаковых частей, а CF — 2. Отсюда $KF = \frac{2 \cdot 40}{5} = 16$.

3. Поэтому $EF = EK + KF = 20 + 16 = 36$, $EF = 36$.

Ответ: 36.

25. Проведём через точку M отрезок $EF \perp DC$ (см. рис. 43). M лежит на средней линии трапеции, значит $MT \parallel AB \parallel CD$, по теореме Фалеса из $BT = TC$ следует $EM = MF$.

$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot EM$, где EM — высота $\triangle ABM$.

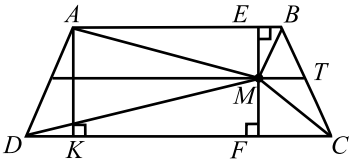


Рис. 43

$S_{CDM} = \frac{1}{2}CD \cdot MF$, где MF — высота $\triangle CDM$.

$S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}AB \cdot EM + \frac{1}{2}CD \cdot MF$.

$EM + MF = EF$, EF — высота трапеции. Ранее было доказано, что $EM = MF$ и $EM = \frac{1}{2}EF$.

$S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}EF + \cdot\frac{1}{2}CD \cdot \frac{1}{2}EF = \frac{1}{4}EF(AB + CD)$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AK$, $AK = EF$ (как перпендикуляры к двум параллельным прямым AB и CD), тогда $S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

26. Пусть $AB = 10x$, тогда $AC = 7x$ (см. рис. 44). Пусть площадь треугольника ABC равна S. Выразим площади треугольника ABK и четырёхугольника $KPCM$ через S. BM — медиана, поэтому $AM = \frac{1}{2}AC = 3{,}5x$. Треугольники ABC и ABM имеют одинаковую высоту h, опущенную из вершины B. Тогда $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AC \cdot h\right) = \frac{1}{2}S$.

AK — биссектриса треугольника ABM, поэтому по свойству биссектрисы $BK : KM = AB : AM$, $BK : KM = 10x : 3{,}5x = 20 : 7$. Тогда $BK = \frac{20}{20+7}BM = \frac{20}{27}BM$. Треугольники ABK и ABM имеют общую высоту h_2, опущенную из вершины A. Тогда $S_{ABK} = \frac{1}{2}BK \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{27}BM \cdot h_2 = \frac{20}{27}S_{ABM} = \frac{10}{27}S$.

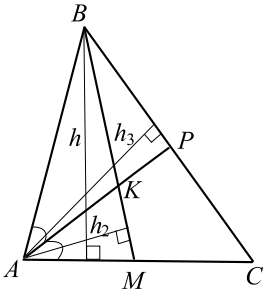


Рис. 44

$S_{KPCM} = S_{APC} - S_{AKM}$, при этом $S_{AKM} = S_{ABM} - S_{ABK} = \frac{1}{2}S - \frac{10}{27}S = \frac{7}{54}S$. По свойству биссектрисы $CP : BP = AC : AB = 7 : 10$. Тогда $CP = \frac{7}{10+7}BC = \frac{7}{17}BC$. Пусть h_3 — высота треугольника ABC, опущенная из вершины A. $S_{APC} = \frac{1}{2}PC \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{17}BC \cdot h_3 = \frac{7}{17}S$. $S_{KPCM} = \frac{7}{17}S - \frac{7}{54}S = \frac{259}{54 \cdot 17}S$.

$$\frac{S_{KPCM}}{S_{ABK}} = \frac{\frac{259}{54 \cdot 17}S}{\frac{10}{27}S} = \frac{259}{340}.$$

Ответ: $\frac{259}{340}$.

Решение варианта 16

21. Найдем область допустимых значений уравнения: $8 + 3x \geqslant 0,\ x \geqslant -\frac{8}{3}$.

Упростим уравнение: $x^2 + 4x - 21 = 0$. Тогда $x_1 = -7,\ x_2 = 3$. Учитывая ОДЗ, $x = 3$ — корень уравнения.

Ответ: 3.

22. По условию время стоянки катера равно 3 часам, время движения катера (против течения реки и по течению реки) составляет $11 - 6 - 3 = 2$ часа. Скорость катера против течения равна 8 км/ч, по течению — 12 км /ч. Пусть x км — расстояние, на которое отплыл катер, $\frac{x}{8}$ ч и $\frac{x}{12}$ ч время, затраченное катером на путь против течения и по течению, соответственно. Тогда $\frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 2,\ 5 \cdot x = 48$, откуда $x = 9{,}6$ (км).

Ответ: 9,6.

23. При $x \leqslant 0$ график является частью прямой $y = -2x - 4$, проходящей через точки $(-1; -2)$ и $(0; -4)$. Эта часть является лучом с началом в точке $(0; -4)$, содержащем точку $(0; -4)$ (см. рис. 45).

При $0 < x \leqslant 2$ график является частью прямой $y = 3x - 5$, проходящей через точки $(0; -5)$ и $(2; 1)$. Эта часть является отрезком с открытым концом в точке $(0; -5)$ и концом в точке $(2; 1)$, принадлежащей графику (см. рис. 45).

При $x > 2$ график является является частью прямой $y = 7 - 4x$, проходящей через точки $(2; -1)$ и $(3; -5)$. Эта часть является лучом с началом в точке $(2; -1)$, которая не принадлежит графику (см. рис. 45).

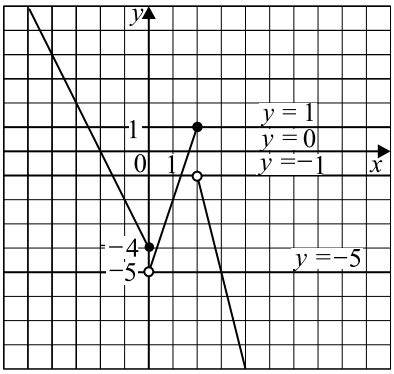


Рис. 45

По графику определяем, что ровно одну общую точку прямая $y = m$ имеет с графиком при $m \in (-\infty; -5] \cup (1; +\infty)$.

Две общие точки прямая $y = m$ имеет с графиком при $m \in (-5; -4) \cup [-1; +1]$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-1; +\infty)$.

24. Согласно условию, построим трапецию $ABCD$ и проведём прямую FE параллельную основаниям (см. рис. 46). Проведём через точку C прямую, параллельную AB, точки её пересечения с прямыми EF и AD обозначим соответственно через K и L.

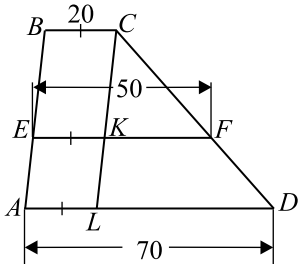


Рис. 46

Тогда $BC = EK = AL = 20$, $LD = 70-20 = 50$, $KF = 50-20 = 30$ и $\triangle LCD \sim \triangle KCF$ (по двум углам: $\angle CKF = \angle CLD$ и $\angle CFK = \angle CDL$).

2. Из подобия треугольников получаем $\dfrac{LD}{KF} = \dfrac{DC}{FC}$, $\dfrac{50}{30} = \dfrac{DF + FC}{FC} = \dfrac{DF}{FC} + 1$. Отсюда $\dfrac{5}{3} = \dfrac{DF}{FC} + 1$, $\dfrac{DF}{FC} = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$.

3. Поэтому $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

25. Проведём высоту трапеции $EF \perp NM$ через точку A (см. рис. 47). Так как A лежит на средней линии трапеции, $NB = BK$ и $AB \parallel NM \parallel KL$. По теореме Фалеса $EA = AF$.

$S_{KAL} = \dfrac{1}{2} KL \cdot AE$, где AE — высота $\triangle KAL$.

$S_{NMA} = \dfrac{1}{2} NM \cdot AF$, где AF — высота $\triangle NMA$.

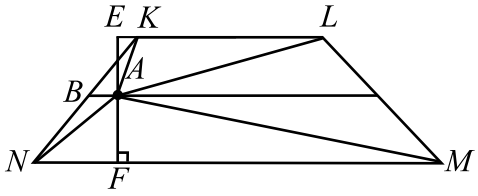


Рис. 47

$S_{KAL} + S_{NMA} = \frac{1}{2}KL \cdot AE + \frac{1}{2}NM \cdot AF = \frac{1}{2}KL \cdot \frac{EF}{2} + \frac{1}{2}NM \cdot \frac{EF}{2} =$

$= \frac{1}{4}EF(KL + NM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}EF \cdot (KL + NM) = \frac{1}{2}S_{KLMN}$, так как

$S_{KLMN} = \frac{1}{2}EF \cdot (KL + NM)$.

26. Пусть $AC = 5x$, тогда $AB = 4x$ (см. рис. 48). Пусть площадь треугольника ABC равна S. Выразим площади треугольника ABK и четырёхугольника $KTCL$ через S. BL — медиана, поэтому $AL = 2{,}5x$. Треугольники ABC и ABL имеют одинаковую высоту h, опущенную из вершины B. Тогда $S_{ABL} = \frac{1}{2}AL \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AC \cdot h\right) = \frac{1}{2}S$.

AK — биссектриса треугольника ABL, поэтому по свойству биссектрисы $BK : KL = AB : AL$, $BK : KL = 4x : 2{,}5x = 8 : 5$. Тогда $BK = \frac{8}{8+5}BL = \frac{8}{13}BL$. Треугольники ABK и ABL имеют общую высоту h_2, опущенную из вершины A. Тогда $S_{ABK} = \frac{1}{2}BK \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13}BL \cdot h_2 = \frac{8}{13}S_{ABL} = \frac{4}{13}S$.

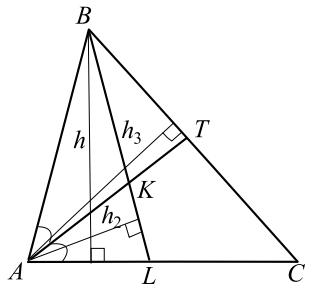


Рис. 48

$S_{KTCL} = S_{ATC} - S_{AKL}$, при этом $S_{AKL} = S_{ABL} - S_{ABK} = \frac{1}{2}S - \frac{4}{13}S = \frac{5}{26}S$. По свойству биссектрисы $CT : BT = AC : AB = 5 : 4$. Тогда $CT = \frac{5}{4+5}BC = \frac{5}{9}BC$. Пусть h_3 — высота треугольника ABC, опущенная из вершины C. $S_{ATC} = \frac{1}{2}TC \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}BC \cdot h_3 = \frac{5}{9}S$.

$S_{KTCL} = \frac{5}{9}S - \frac{5}{26}S = \frac{85}{26 \cdot 9}S$.

$$\frac{S_{ABK}}{S_{KTCL}} = \frac{\frac{4}{13}S}{\frac{85}{26\cdot 9}S} = \frac{72}{85}.$$

Ответ: $\frac{72}{85}$.

Решение варианта 18

21. Числитель дроби отрицательный, поэтому дробь равна нулю быть не может. Чтобы дробь принимала положительные значения, знаменатель должен быть отрицательным.

$(x+5)^2-3<0,\ x^2+10x+22<0$. Заданное неравенство свелось к квадратному.

Решим неравенство $x^2+10x+22<0$ методом интервалов. Найдем нули левой части.

$$x^2+10x+22=0,\ x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{12}}{2}=-5\pm\sqrt{3}, x_1=-5-\sqrt{3},$$

$x_2=-5+\sqrt{3}$.

На рисунке 49 изображены знаки левой части неравенства.

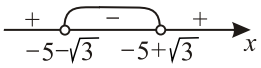


Рис. 49

Решение неравенства $(-5-\sqrt{3};-5+\sqrt{3})$.

Замечание. Выражение $(x+5)^2-3$ можно было разложить на множители, используя формулу разности квадратов. Таким образом можно найти корни уравнения $(x+5)^2-3=0$ быстрее.

$(x+5)^2-(\sqrt{3})^2=0,\ (x+5+\sqrt{3})(x+5-\sqrt{3})=0,$

$x+5+\sqrt{3}=0$ или $x+5-\sqrt{3}=0$. Получаем $x_1=-5-\sqrt{3}, x_2=-5+\sqrt{3}$.

Ответ: $(-5-\sqrt{3};-5+\sqrt{3})$.

22. $v_{\text{ср}}=\frac{S}{t}$, где S — пройденный путь, t — время, затраченное на весь путь. Время, затраченное автомобилем на первую половину пути, равно $\frac{S}{2\cdot 74}$ ч, на вторую половину — $\frac{S}{2\cdot 86}$ ч. Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна

$$\frac{S}{\frac{S}{2\cdot 74}+\frac{S}{2\cdot 86}}=\frac{2}{\frac{1}{74}+\frac{1}{86}}=\frac{2\cdot 74\cdot 86}{160}=79{,}55\,(\text{км/ч}).$$

Ответ: 79,55.

23. Общие точки прямой $y=px$ и графика функции $y=x^2+1$ находятся из уравнения $x^2+1=px$. Такая точка одна, если уравнение $x^2-px+1=0$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант $D=p^2-4$ равен нулю. Получаем, $p^2-4=0, p=\pm 2$.

Графиком функции $y=x^2+1$, является парабола с вершиной $(0;1)$, ветви которой направлены вверх. Графиками функций $y=2x$; $y=-2x$, являются прямые. Заметим, что $x^2+1=2x$, при $x=1$, а $x^2+1=-2x$, при $x=-1$. $y(-1)=y(1)=2$ (см. рис. 50).

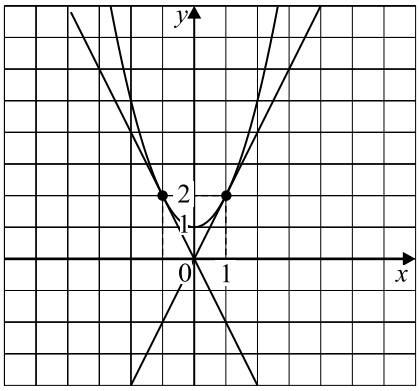


Рис. 50

Таким образом, прямая $y = px$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = x^2 + 1$ ровно одну общую точку при $p = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

24. Согласно условию, построим равнобедренный треугольник ABC, проведём биссектрисы углов при основании AC и через точку пересечения M проведём прямую EF, параллельную AC (см. рис. 51).

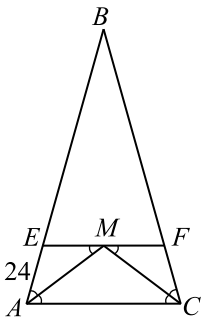


Рис. 51

1. Углы A и C при основании равнобедренного треугольника равны между собой. Поэтому $\angle MAE = \angle MAC = \angle MCA = \angle MCF$.

Значит $\triangle AMC$ — равнобедренный и $AM = MC$.

2. По свойству параллельных прямых и секущей получаем $\angle MAC = \angle AME$. Аналогично, $\angle MCA = \angle CMF$. Отсюда следует, что по стороне и двум прилежащим углам равны треугольники AEM и MFC. Кроме того, $AE = EM = MF = FC$.

3. Тогда $EF = 2AE = 2 \cdot 24 = 48$, $EF = 48$.

Ответ: 48.

25. $S_{MAN} = S_{MNQ} - S_{MAQ}$ (см. рис. 52).

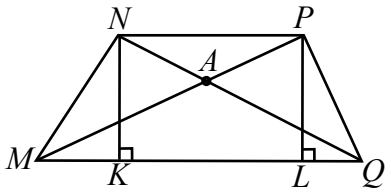


Рис. 52

$S_{QAP} = S_{MPQ} - S_{MAQ}$.

$S_{MNQ} = \frac{1}{2}MQ \cdot NK$, где NK — высота треугольника MNQ.

$S_{MPQ} = \frac{1}{2}MQ \cdot PL$, где PL — высота треугольника MPQ.

Но $NK = PL$ как перпендикуляры, проведённые из двух точек одной из параллельных прямых к другой. ($NP \parallel MQ$.)

Тогда $S_{MNQ} = S_{MPQ}$.

Следовательно, $S_{MAN} = S_{QAP}$.

26. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями BC и AD ($AD > BC$), в которую можно вписать окружность (см. рис. 53). Пусть T — точка пересечения диагоналей, CH, BN и MK — высоты, при этом MK проходит через точку T.

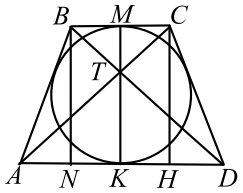


Рис. 53

По свойству описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = AB + CD$, при этом по условию $AB + BC + CD + AD = 104$. Тогда $AB + BC + CD + AD = 2(BC + AD) = 104$. $BC + AD = 52$ и $AB + CD = 2CD = 52$, так как трапеция равнобедренная. Тогда $AB = CD = 26$.

Площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{BC + AD}{2} \cdot CH = 624$; $\frac{52}{2} \cdot CH = 624$; $CH = 24$.

Из $\triangle CHD$ по теореме Пифагора $HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} =$
$= \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{(26 - 24)(26 + 24)} = \sqrt{100} = 10$.

$\triangle BAN = \triangle CDH$, поэтому $AN = HD = 10$. $NBCH$ — прямоугольник, следовательно, $NH = BC$. Тогда $AD + BC = 10 + 10 + 2BC = 52$, $BC = 16$; $AD = 16 + 10 + 10 = 36$.

Заметим, что $\triangle BTC \sim \triangle ATD$ по двум углам ($\angle ATD = \angle BTC$ как вертикальные, $\angle BCT = \angle TAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC), тогда $\frac{MT}{TK} = \frac{BC}{AD} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ (отношение соответствующих высот подобных треугольников равно коэффициенту подобия).

$MT = \frac{4}{4 + 9}KM = \frac{96}{13} = 7\frac{5}{13}$.

Ответ: $7\frac{5}{13}$.

Решение варианта 19

21. Преобразуем неравенство. $(2x-7)^2-(6x+1)^2 \geqslant 0$,
Разложим левую часть неравенства по формуле разности квадратов.
$(2x-7-(6x+1))(2x-7+(6x+1)) \geqslant 0,\ (-4x-8)(8x-6) \geqslant 0,\ (4x+8)(8x-6) \leqslant 0.$
$(4x+8)(8x-6)=0,\ x_1=-2,\ x_2=\dfrac{3}{4}.$

На рисунке 54 изображены знаки левой части неравенства.

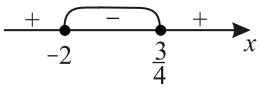


Рис. 54

Решение неравенства $\left[-2;\dfrac{3}{4}\right]$.

Ответ: $\left[-2;\dfrac{3}{4}\right]$.

22. Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля ($x>0$), (x+30) км/ч — скорость первого автомобиля, $\dfrac{250}{x+30}$ ч и $\dfrac{250}{x}$ ч, соответственно, время, за которое первый и второй автомобили совершили пробег.

По условию первый автомобиль прибыл к финишу на 7,5 часов раньше второго, поэтому $\dfrac{250}{x}-\dfrac{250}{x+30}=7{,}5,\ \ 250\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+30}\right)=\dfrac{15}{2},\ \ x^2+30x-1000=0$, откуда $x=20$, $x=-50$. Значение -50 не удовлетворяет условию $x>0$. $x+30=50$. Итак, скорость первого автомобиля равна 50 км/ч.

Ответ: 50.

23. Общие точки прямой $y=kx$ и графика функции $y=-x^2-4$ находятся из уравнения $-x^2-4=kx$. Такая точка одна, если уравнение $-x^2-kx-4=0$ или $x^2+kx+4=0$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант $D=k^2-16$ равен нулю. Получаем, $k^2=16$, $k=\pm 4$.

Графиком функции $y=-x^2-4$, является парабола с вершиной $(0;-4)$, ветви которой направлены вниз. Графики функций $y=4x$; $y=-4x$, являются прямыми. Заметим, что $-x^2-4=4x$, при $x=-2$, а $-x^2-4=-4x$ при $x=2$ (см. рис. 55). $y(-2)=y(2)=-8$.

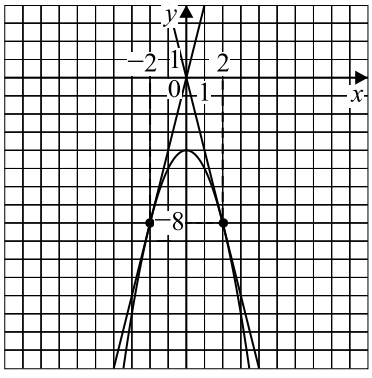


Рис. 55

Таким образом, каждая из прямых $y = 4x$ и $y = -4x$ имеет с графиком функции $y = x^2 - 4$ ровно одну общую точку. Значит, $k = \pm 4$.

Ответ: ± 4.

24. Согласно условию, построим произвольный треугольник ABC, проведём среднюю линию MN и биссектрисы углов A и M (см. рис. 56).

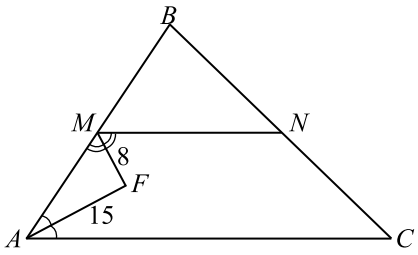


Рис. 56

1. Отрезок MN является средней линией треугольника ABC, поэтому $MN \parallel AC$. По свойствам параллельных прямых сумма углов CAM и NMA равна 180°. Так как AF и MF являются биссектрисами этих углов, то $\angle FAM + \angle FMA = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Тогда в треугольнике MFA угол F равен 90° и $\triangle MFA$ – прямоугольный с прямым углом F.

2. По теореме Пифагора
$AM = \sqrt{AF^2 + FM^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$, $AM = 17$.

Ответ: 17.

25. Проведём перпендикуляры из точки A к прямым MP, MN и PK: $AE \perp MN$, $AL \perp MP$, $AL \perp PK$ (см. рис. 57).

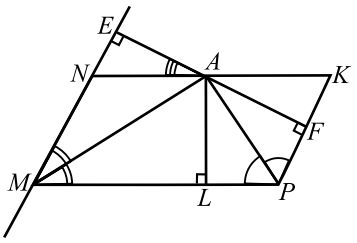


Рис. 57

Так как точки, лежащие на биссектрисах углов $\angle NMP$ и $\angle MPK$ равноудалены от сторон угла и точка A лежит на биссектрисах углов NMP и MPK, то $AE = AL$, $AL = AF$, откуда $AE = AF$. $MN \parallel KP$, углы ANE и AKF равны как накрест лежащие при этих прямых и секущей KN.

Прямоугольные треугольники ANE и AKF равны по катету $AE = AF$ и острому углу $\angle ANE = \angle AKF$, поэтому равны их гипотенузы: $AN = AK$, то есть точка A — середина NK.

26. Изобразим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD (см. рис. 58), K — точка пересечения диагоналей. Пусть $BD = 15$, $AC = 8$, средняя линия равна 8,5, следовательно, $\frac{BC + AD}{2} = 8{,}5$, $BC + AD = 17$.

Заметим, что $\triangle BKC \sim \triangle AKD$ по двум углам ($\angle BKC = \angle AKD$ как вертикальные, $\angle CBK = \angle KDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секу-

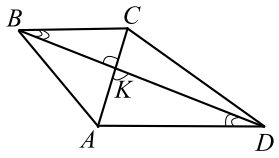


Рис. 58

щей BD). Тогда $\frac{CK}{AK} = \frac{BK}{KD} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{AC-AK}{AK} = \frac{BD-KD}{KD} = \frac{17-AD}{AD}$, $\frac{AC}{AK}-1 = \frac{BD}{KD}-1 = \frac{17}{AD}-1$, $\frac{AC}{AK} = \frac{BD}{KD} = \frac{17}{AD}$, $\frac{8}{AK} = \frac{15}{KD} = \frac{17}{AD}$, $\frac{AK}{8} = \frac{KD}{15} = \frac{AD}{17}$.

Отсюда $AK = \frac{8}{17}AD$, $KD = \frac{15}{17}AD$ и $AK^2 + KD^2 = \frac{64}{289}AD^2 + \frac{225}{289}AD^2 = AD^2$. Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle AKD$ — прямоугольный, $\angle AKD = 90°$.

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}BD \cdot KC + \frac{1}{2}BD \cdot AK =$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot \Big(KC + AK\Big) = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60.$$

Ответ: 60.

Решение варианта 20

21. Преобразуем неравенство.
$(x-7)^2 - \sqrt{5}(x-7) > 0,\ (x-7)(x-7-\sqrt{5}) > 0.$

Найдем нули левой части.
$(x-7)(x-7-\sqrt{5}) = 0,\ x_1 = 7,\ x_2 = 7+\sqrt{5}.$

На рисунке 59 изображены знаки левой части неравенства.

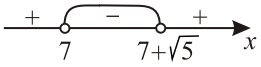


Рис. 59

Решение неравенства $(-\infty; 7) \cup (7+\sqrt{5}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 7) \cup (7+\sqrt{5}; +\infty)$.

22. Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля ($x > 0$), $(x+10)$ км/ч — скорость первого автомобиля, $\frac{720}{x+10}$ ч и $\frac{720}{x}$ ч, соответственно, время, за которое первый и второй автомобили совершили пробег. По условию первый автомобиль прибыл к финишу на 50 часов раньше второго, поэтому $\frac{720}{x} - \frac{720}{x+10} = 50,\ 72 \cdot \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10}\Big) = 5, x^2+10x-144 = 0,$ откуда $x_1 = 8,\ x_2 = -18$. Значение -18 не удовлетворяет условию $x > 0$. Итак, скорость второго автомобиля равна 8 км/ч.

Ответ: 8.

23. Общие точки прямой $y = kx$ и графика функции $y = -x^2 - 1$ находятся из уравнения $-x^2 - 1 = kx$. Такая точка одна, если уравнение $-x^2 - kx - 1 = 0$ или $x^2 + kx + 1 = 0$ имеет один корень. Уравнение квадратное, оно имеет один корень, если дискриминант $D = k^2 - 4$ равен нулю. Получаем, $k^2 = 4$, $k = \pm 2$. Поэтому $y = 2x$ или $y = -2x$.

График функции $y = -x^2 - 1$, является параболой с вершиной $(0; -1)$, ветви которой направлены вниз. Графики функций $y = 2x$ и $y = -2x$ являются прямыми. Заметим, что $-x^2 - 1 = 2x$ при $x = -1$, а $-x^2 - 1 = -2x$ при $x = 1$. $y(-1) = y(1) = 2$ (см. рис. 60).

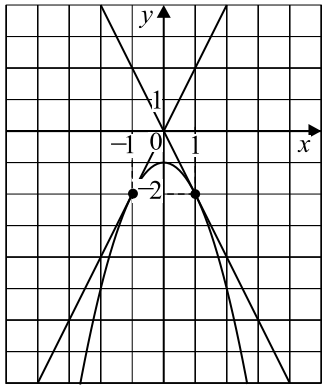


Рис. 60

Таким образом, каждая из прямых $y = 2x$ и $y = -2x$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Значит, $k = \pm 2$.

Ответ: ± 2.

24. Согласно условию построим параллелограмм $ABCD$ и проведём биссектрисы углов A и B (см. рис. 61).

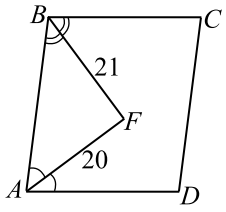


Рис. 61

В параллелограмме $ABCD$ противоположные стороны AD и BC параллельны.

1. По свойствам параллельных прямых сумма внутренних углов A и B равна $180°$. Так как AF и BF являются биссектрисами этих углов, то $\angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Тогда в треугольнике BFA угол F равен $90°$ и $\triangle BFA$ – прямоугольный с прямым углом F.

2. По теореме Пифагора

$AB = \sqrt{AF^2 + FB^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$, $AB = 29$.

Ответ: 29.

25. Проведем перпендикуляры к прямым MN, PK и MP из точки B. Длины отрезков BE, BF, BL равны расстояниям до соответствующих прямых. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от сторон угла. Точка B лежит на биссектрисах углов NMP и MPK, поэтому $BE = BL$ и $BL = BF$. Значит, $BE = BL = BF$, то есть расстояния до прямых MN, MP и KP равны.

26. Изобразим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD (см. рис. 63), K — точка пересечения диагоналей. Пусть $BD = 24$, $AC = 7$, средняя линия равна 12,5, следовательно, $\frac{BC + AD}{2} = 12{,}5$, $BC + AD = 25$.

Заметим, что $\triangle BKC \sim \triangle AKD$ по двум углам ($\angle BKC = \angle AKD$ как вертикальные, $\angle CBK = \angle KDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секу-

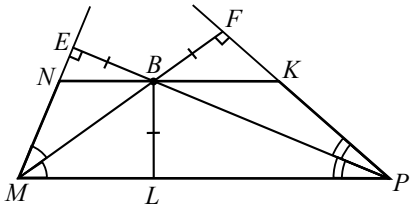


Рис. 62

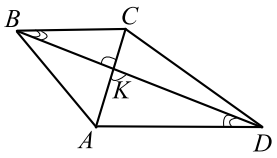


Рис. 63

щей BD). Тогда $\frac{CK}{AK} = \frac{BK}{KD} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{AC-AK}{AK} = \frac{BD-KD}{KD} = \frac{25-AD}{AD}$, $\frac{AC}{AK}-1 = \frac{BD}{KD}-1 = \frac{25}{AD}-1$, $\frac{AC}{AK} = \frac{BD}{KD} = \frac{25}{AD}$, $\frac{7}{AK} = \frac{24}{KD} = \frac{25}{AD}$, $\frac{AK}{7} = \frac{KD}{24} = \frac{AD}{25}$.

Отсюда $AK = \frac{7}{25}AD$, $KD = \frac{24}{25}AD$ и $AK^2 + KD^2 = \frac{49}{625}AD^2 + \frac{576}{625}AD^2 = AD^2$. Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle AKD$ — прямоугольный, $\angle AKD = 90°$.

$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}BD \cdot KC + \frac{1}{2}BD \cdot AK =$

$= \frac{1}{2}BD \cdot (KC + AK) = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 = 84.$

Ответ: 84.

Решение варианта 22

21. $(x-4)(x-5)(x-6) = (x-4)(x-5)(x-7)$,
$(x-4)(x-5)(x-6) - (x-4)(x-5)(x-7) = 0$,
$(x-4)(x-5)(x-6-x+7) = 0$,
$(x-4)(x-5) = 0$,
$x-4=0$, или $x-5=0$,
$x_1 = 4$ $x_2 = 5$.

Ответ: 4; 5.

22. Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда за 1 час он пробежал x км. Длина круга равна $(x + 0{,}625)$ км. По условию скорость первого бегуна на 1,5 км/ч меньше скорости второго, поэтому скорость второго бегуна равна $(x+1{,}5)$ км/ч. Второй бегун пробежал круг за 57 минут, то есть за $\frac{19}{20}$ часа. Значит, $\frac{19}{20} \cdot (x + 1{,}5) = x + \frac{625}{1000}$; $\frac{19}{20} \cdot x + \frac{19}{20} \cdot \frac{3}{2} = x + \frac{25}{40}$; $\frac{x}{20} = \frac{16}{20}$; $x = 16$. Итак, скорость первого бегуна 16 км/ч.

Ответ: 16.

23. Общие точки прямой $y = 3x$ и графика функции $y = x^2 + p$ находятся из уравнения $3x = x^2 + p$. Такая точка одна, если уравнение $x^2 - 3x + p = 0$ имеет один корень. Тогда его дискриминант $D = 9 - 4p$ должен быть равен нулю.

Получаем $9 - 4p = 0$, $p = \dfrac{9}{4}$, $p = 2{,}25$. $y = x^2 + 2{,}25$.

График функции $y = x^2 + 2{,}25$, является параболой с вершиной $(0; 2{,}25)$, ветви которой направлены вверх. График функции $y = 3x$, является прямой. Заметим, что $x^2 + 2{,}25 = 3x$ при $x = 1{,}5$, $y(1{,}5) = 4{,}5$ (см. рис. 64).

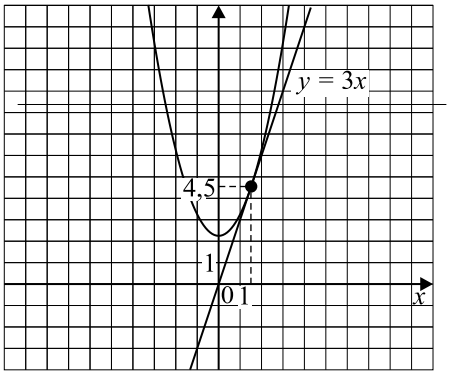


Рис. 64

Таким образом, прямая $y = 3x$ имеет с графиком функции $y = x^2 + p$ ровно одну общую точку при $p = 2{,}25$.

Ответ: 2,25.

24. Согласно условию, построим трапецию $ABCD$, где $\angle BAD = 45°$, $\angle CDA = 120°$ (см. рис. 65).

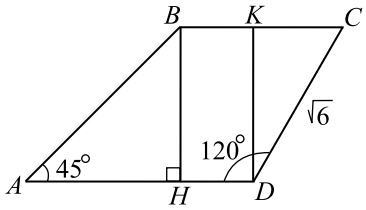


Рис. 65

1. Из точки D восстановим перпендикуляр к прямой AD и через K обозначим точку пересечения этого перпендикуляра с прямой BC. Тогда $DK \perp BC$. Так как угол $CDA = 120°$, то $\angle CDK = 120° - 90° = 30°$. Из равенства $\cos\angle CDK = \dfrac{KD}{CD}$ получаем $\cos 30° = \dfrac{KD}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{KD}{\sqrt{6}}$, $KD = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{18}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

2. Из точки B опустим перпендикуляр BH на основание AD, тогда $BH = DK$. В прямоугольном треугольнике BHA один из острых углов по условию равен $45°$, поэтому второй также будет равен $45°$. Значит треугольник BHA — равнобедренный, поэтому $AH = BH = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

3. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3

25. Треугольники O_1PO_2 и O_1QO_2 равны по трём сторонам (O_1O_2 общая, $O_1P = O_1Q$ и $O_2P = O_2Q$ как радиусы) (см. рис. 66).

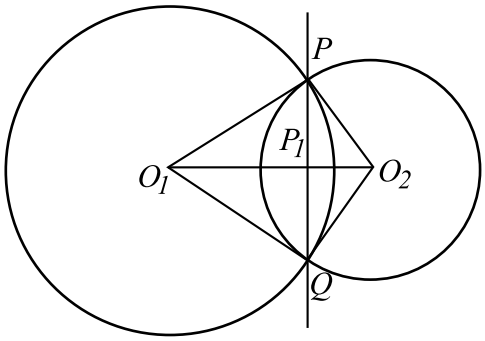


Рис. 66

Тогда $\angle PO_1O_2 = \angle QO_1O_2$ и O_1O_2 — биссектриса $\angle PO_1Q$. В равнобедренном $\triangle PO_1Q$ биссектриса O_1P_1 является высотой и значит $O_1O_2 \perp PQ$.

26. Точка K равноудалена от вершин многоугольника, то есть $AK = BK = CK = DK$. Тогда окружность с центром в точке K и радиусом $R = AK$ проходит через точки A, B, C, D, то есть описана около четырёхугольника $ABCD$, причём AD — диаметр этой окружности (см. рис. 67), $AD = 2R$. Но тогда полученная окружность описана, в частности, и около $\triangle ABC$, следовательно, по теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC}$.

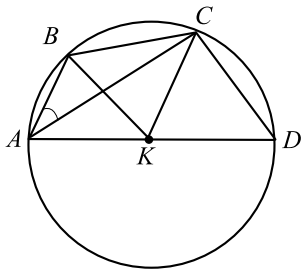


Рис. 67

.

$\angle BAC$ — вписанный, поэтому $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\smile BC$. Найдём $\smile BC$, используя тот факт, что $\smile BC = \smile ABD - \smile AB - \smile CD$.

Заметим, что $\angle ABC$ — вписанный, поэтому $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\smile ADC$, следовательно, $\smile ADC = 2\angle ABC = 2 \cdot 123^\circ = 246^\circ$. Тогда $\smile CD = \smile ADC - \smile AD = 246^\circ - 180^\circ = 66^\circ$.

Аналогично заметим, что $\angle BCD$ — вписанный, поэтому $\angle BCD = \dfrac{1}{2}\smile BAD$, следовательно, $\smile BAD = 2\angle BCD = 2 \cdot 102^\circ = 204^\circ$. Тогда $\smile AB = \smile BAD - \smile AD = 204^\circ - 180^\circ = 24^\circ$.

Далее, $\smile BC = \smile ABD - \smile AB - \smile CD = 180^\circ - 24^\circ - 66^\circ = 90^\circ$, $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\smile BC = 45^\circ$,

$$AD = 2R = \frac{18}{\sin 45^\circ} = \frac{18}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 18\sqrt{2}.$$

Ответ: $18\sqrt{2}$.

Решение варианта 23

21. Заменим одно из уравнений системы на сумму уравнений. Получим

$\begin{cases} 7y^2 + 2x = 12, \\ 10y^2 = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 12 - 7y^2, \\ y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 12 - 7 \cdot 4, \\ y = \pm 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -8, \\ y = \pm 2. \end{cases}$

Решения системы: $(-8; -2)$, $(-8; 2)$.

Ответ: $(-8; -2)$, $(-8; 2)$.

22. Пусть S км — длина пути, x км/ч — скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $(x - 20)$ км/ч. $\dfrac{S}{x}$ ч — время в пути первого автомобиля, $\dfrac{S}{2 \cdot (x - 20)} + \dfrac{S}{2 \cdot 120}$ ч — время в пути второго автомобиля. Так как время в пути одно и то же, то выполняется равенство $\dfrac{S}{x} = \dfrac{S}{2 \cdot (x - 20)} + \dfrac{S}{2 \cdot 120}$ или $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2 \cdot (x - 20)} + \dfrac{1}{240}$.

$240(x - 20) = 120x + x(x - 20)$, $x^2 - 140x + 20 \cdot 240 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 80$, $x_2 = 60$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость первого автомобиля 80 км/ч.

Ответ: 80.

23. Упростим выражение при $x \neq -3$.

$\dfrac{(x^2 + 3x)|x|}{x + 3} = \dfrac{x(x + 3)|x|}{x + 3} = x|x|$.

$y = x|x|$ при $x \neq -3$, $y(-3) = -9$.

Построим график заданной функции.

Если $x \geqslant 0$, то $y = x^2$. Графиком является правая ветвь параболы $y = x^2$ (см. рис. 68).

Если $x < 0$, то $y = -x^2$. Точка $(-3; -9)$ не принадлежит графику. Графиком является левая ветвь параболы $y = -x^2$ с удалённой точкой $(-3; -9)$ (см. рис. 68.

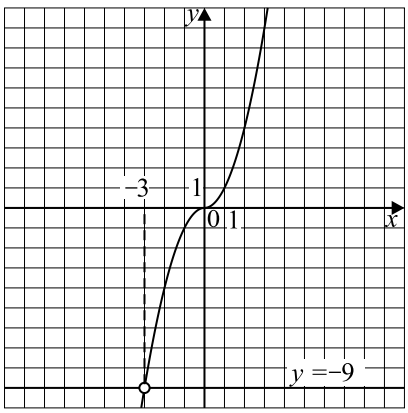


Рис. 68

По рисунку определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс, ни одной общей точки, если прямая проходит через точку $(-3; -9)$, значит, $a = -9$.

Ответ: -9.

24. Согласно условию, построим окружность с центром O и в ней проведём хорды AB и CD (см. рис. 69).

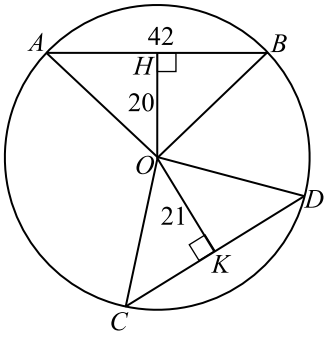


Рис. 69

1. Расстояние от точки O до хорды AB равно длине перпендикуляра OH, опущенного из точки O на AB. Треугольник AOB — равнобедренный, его боковые стороны являются радиусами окружности. Поэтому OH является медианой, а $HB = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$.

2. По теореме Пифагора для треугольника OHB получаем $OB^2 = OH^2 + HB^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$. Отметим, что $OD^2 = OB^2$; $OD = OB$ — как радиусы одной окружности.

3. Аналогично, считая, что точка K является серединой CD, получаем $KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{841 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$. Отсюда $CD = 2KD = 2 \cdot 20 = 40$, $CD = 40$.

Ответ: 40.

25. PK — общая внутренняя касательная, точки касания — P и K, O_1O_2 пересекает общую касательную в точке O, тогда $OK : OP = a : b$ (см. рис. 70). $\triangle OKO_2 \sim \triangle OPO_1$ по двум углам ($\angle O_2OK = \angle O_1OP$ — как вертикальные, $\angle O_1PO = \angle O_2KO = 90^\circ$ — как углы между касательной и радиусом, проведённым в точку касания).

$\frac{O_2K}{O_1P} = \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{OK}{OP}$; $\frac{OK}{OP} = \frac{a}{b}$, отсюда $\frac{O_2K}{O_1P} = \frac{a}{b}$; что и требовалось доказать.

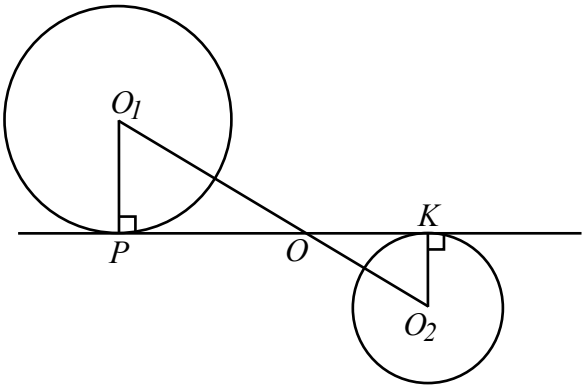


Рис. 70

26. Пусть BH — высота треугольника ABC, AM — биссектриса, K — их точка пересечения (см. рис. 71).

AK — биссектриса $\triangle ABH$. Тогда по свойству биссектрисы $BK : KH = AB : AH$, следовательно, $AB : AH = 17 : 8$. Пусть $AB = 17x$, тогда $AH = 8x$, по теоре-

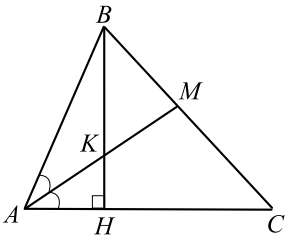


Рис. 71

ме Пифагора для треугольника ABH получим, что $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 15x$. Отсюда $\sin\angle BAH = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{15}{17}$.

Пусть R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, тогда по теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{90}{\frac{15}{17}} = 102$, $R = 51$.

Ответ: 51.

Решение варианта 24

21. Заменим одно из уравнений системы на разность уравнений. Получим

$\begin{cases} (8-3x)^2 = 4y, \\ (8-3x)^2 - (3-2x)^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (8-3x)^2 = 4y, \\ (8-3x+3-2x)(8-3x-(3-2x)) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (8-3x)^2 = 4y, \\ (11-5x)(5-x) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, x = 2{,}2, \\ y = (8-3x)^2 : 4. \end{cases}$

Разберем два случая.

1) $x = 5, y = (8 - 3\cdot 5)^2 : 4 = 12{,}25$.

2) $x = 2{,}2,\ y = (8 - 3\cdot 2{,}2)^2 : 4 = 0{,}49$.

Решения $(5; 12{,}25),\ (2{,}2; 0{,}49)$.

Ответ: $(5; 12{,}25),\ (2{,}2; 0{,}49)$.

22. Пусть S км — длина пути, x км/ч — скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $(x-14)$ км/ч. $\dfrac{S}{x}$ ч — время в пути первого автомобиля, $\dfrac{S}{2\cdot(x-14)} + \dfrac{S}{2\cdot 84}$ ч — время в пути второго автомобиля. Так как время в пути одно и то же, то выполняется равенство $\dfrac{S}{x} = \dfrac{S}{2\cdot(x-14)} + \dfrac{S}{2\cdot 84}$ или $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2\cdot(x-14)} + \dfrac{1}{168}$.

$168(x-14) = 84x + x(x-14)$, $x^2 - 98x + 14\cdot 168 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 56, x_2 = 42$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость первого автомобиля 56 км/ч.

Ответ: 56.

23. Упростим выражение при $x \neq 4$.

$\dfrac{(x^2-4x)|x|}{x-4} = \dfrac{x(x-4)|x|}{x-4} = x|x|$.

$y = x|x|$ при $x \neq 4$, $y(4) = 16$.

Построим график заданной функции.

Если $x \geqslant 0$, то $y = x^2$. Графику не принадлежит точка $(4; 16)$.

Графиком является правая ветвь параболы $y = x^2$ с удалённой точкой $(4; 16)$. Если $x < 0$, то $y = -x^2$. Графиком является левая часть параболы $y = -x^2$ (см. рис. 72).

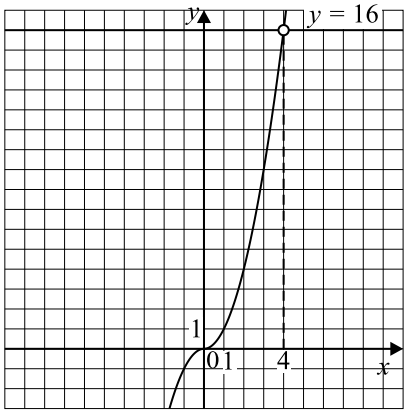


Рис. 72

По рисунку определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс, ни одной общей точки, если прямая проходит через точку $(4; 16)$ значит, $a = 16$.

Ответ: 16.

24. Согласно условию, построим окружность с центром O и в ней проведём хорды AB и CD (см. рис. 73). Из O опустим перпендикуляры OH и OK соответственно на хорды AB и CD. Тогда длины отрезков OH и OK будут расстояниями от центра окружности до соответствующих хорд.

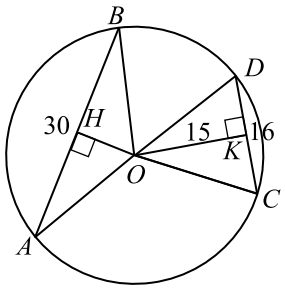


Рис. 73

1. Треугольники AOB и COD — равнобедренные. Боковыми сторонами в них являются радиусы окружности. Поэтому высота OK является медианой в треугольнике ODC, а в прямоугольном треугольнике OKD $KD = 8$ и $OK = 15$.

2. По теореме Пифагора для треугольника OKD получаем $OD^2 = OK^2 + KD^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$. Так как OD и OB – радиусы окружности, то $OB^2 = OD^2 = 289$.

3. Аналогично получаем, что треугольник OHB – прямоугольный и $HB = 15$. По теореме Пифагора для этого треугольника получаем

$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{289 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$.

Ответ: 8.

25. Пусть $\dfrac{O_1X}{O_2X} = \dfrac{m}{n}$, A и B — точки касания (см. рис. 74). Пусть d_1 и d_2 — диаметры окружностей, $d_1 = 2O_1A$, $d_2 = 2O_2B$.

$\triangle O_1AX \sim \triangle O_2BX$ по двум углам ($\angle O_1XA = \angle O_2XB$, $\angle O_1AX = \angle O_2BX = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусом, проведённым в точку касания). Следовательно, $\dfrac{O_1X}{O_2X} = \dfrac{O_1A}{O_2B} = \dfrac{m}{n}$; $\dfrac{O_1A}{O_2B} = \dfrac{m}{n}$. Тогда $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{m}{n}$.

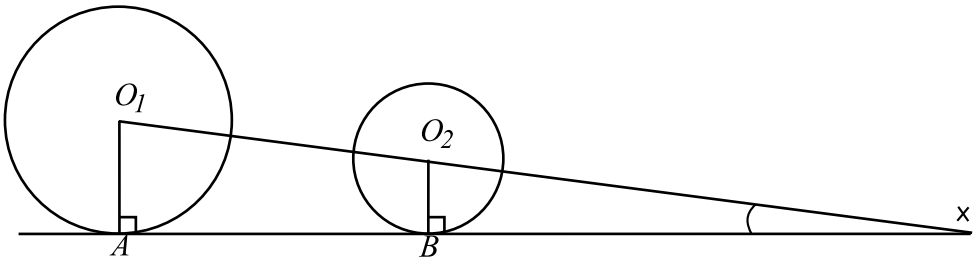


Рис. 74

26. Пусть LQ — высота треугольника KLM, KN — биссектриса, P — их точка пересечения (см. рис. 75).

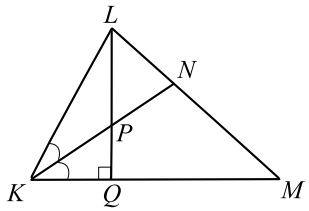


Рис. 75

KP — биссектриса $\triangle KLQ$. Тогда по свойству биссектрисы $LP : PQ = KL : KQ$, следовательно, $KL : KQ = 29 : 21$. Пусть $KL = 29x$, тогда $KQ = 21x$, по теореме Пифагора для треугольника KLQ получим, что $LQ = \sqrt{KL^2 - KQ^2} = 20x$. Отсюда $\sin\angle LKQ = \dfrac{LQ}{LK} = \dfrac{20}{29}$.

Пусть R — радиус описанной окружности $\triangle KLM$, тогда по теореме синусов $2R = \dfrac{LM}{\sin\angle K} = \dfrac{200}{\frac{20}{29}} = 290$, $R = 145$.

Ответ: 145.

Решение варианта 26

21. Выразим переменную x из первого уравнения системы и подставим во второе.

$x = \dfrac{6}{y}$, $\left(\dfrac{6}{y}\right)^2 + y^2 = 13$, $\dfrac{36}{y^2} + y^2 - 13 = 0$,

$y^4 - 13y^2 + 36 = 0$.

Пусть $y^2 = t$, тогда $t^2 - 13t + 36 = 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = 9$.

$y^2 = 4, y = \pm 2$; $y^2 = 9, y = \pm 3$.

Разберем четыре случая.

1) $y = -2$, $x = \dfrac{6}{-2} = -3$;

2) $y = -3$, $x = -2$;

3) $y = 2$, $x = 3$;

4) $y = 3$, $x = 2$.

Решения системы: $(-2;-3)$, $(-3;-2)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

Ответ: $(-2;-3)$, $(-3;-2)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

22. Пусть x км/ч — скорость лодки в неподвижной воде, $(x-4)$ км/ч — скорость лодки против течения, $(x+4)$ км/ч — скорость лодки по течению реки. Путь против течения

лодка прошла за $\frac{80}{x-4}$ ч, а путь по течению — за $\frac{80}{x+4}$ ч. Так как на путь по течению лодка затратила на 5 часов меньше, то верно равенство $\frac{80}{x-4}-\frac{80}{x+4}=5$, или $\frac{16}{x-4}-\frac{16}{x+4}=1$.

Решим последнее уравнение. $16(x+4)-16(x-4)=x^2-16$, $x^2=144, x=\pm 12$. Так как $x>0$, то $x=12$. Значит, скорость лодки в неподвижной воде равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

23. Преобразуем выражение $\frac{6x+18}{x(x+3)}=\frac{6}{x}$, $x\neq -3$, $x\neq 0$. $y=\frac{6}{x}$ при условии $x\neq -3$, $x\neq 0$, $y(-3)=-2$.

График функции получается из гиперболы, $y=\frac{6}{x}$ удаляем точки $(-3;-2)$ (см. рис. 76).

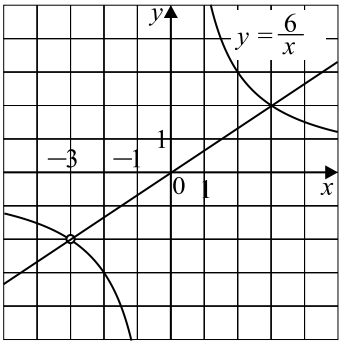


Рис. 76

Прямая $y=kx$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции ровно одну общую точку, если проходит ещё через точку $(-3;-2)$.

Тогда $-2=k\cdot(-3)$, $k=(-2):(-3)=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

24. Согласно условию, опишем около окружности параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 77). Суммы его противоположных сторон равны, именно $AB+CD=BC+AD$; но в параллелограмме $AB=CD$, $BC=AD$, получается $2AB=2BC$, то есть $AB=BC$. Отсюда, параллелограмм $ABCD$ есть ромб. $P_{ABCD}=4\cdot AB$; $40=4AB$, $AB=10$.

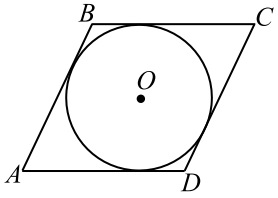


Рис. 77

Ответ: 10.

25. $\triangle MON_1\sim\triangle NOM_1$ по двум углам ($\angle MON_1=\angle NOM_1$ как вертикальные, $\angle MN_1O=\angle NM_1O=90^\circ$) (см. рис. 78).

Из подобия следует пропорциональность сторон: $\frac{MO}{NO}=\frac{ON_1}{OM_1}=\frac{MN_1}{NM_1}$.

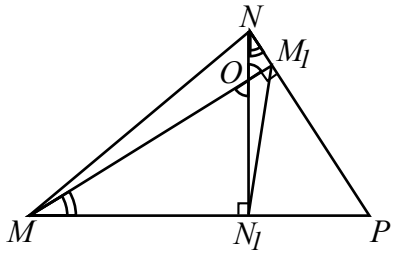


Рис. 78

Следовательно, $\triangle MNO \sim \triangle M_1N_1O$ (пропорциональные стороны $\frac{MO}{NO} = \frac{ON_1}{OM_1}$ и $\angle MON = \angle M_1ON_1$ как вертикальные).

26. Обозначим центр окружности радиуса 51 через O_1 и радиуса 17 через O_2 (см. рис. 79).

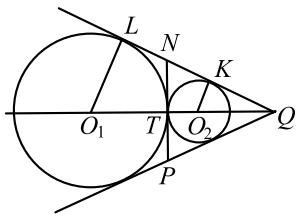


Рис. 79

Проведём радиусы O_1L и O_2K к точкам касания с прямой QN. Заметим, что $\triangle O_2KQ \sim \triangle O_1LQ$ по двум углам ($\angle KQT$ — общий, $\angle O_1LQ = \angle O_2KQ = 90°$, так как радиусы, проведённые в точку касания, перпендикулярны касательной). Отсюда $\frac{O_1L}{O_2K} = \frac{QO_1}{QO_2}$, $\frac{51}{17} = \frac{QO_2 + O_2T + TO_1}{QO_2}$, $\frac{QO_2 + 68}{QO_2} = 3$, $QO_2 = 34$. $\sin\angle KQO_2 = \frac{KO_2}{QO_2} = \frac{1}{2}$, $\angle KQO_2 = 30°$, $\angle NQP = 60°$, так как центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе, то есть O_1Q — биссектриса $\angle NQP$.

Далее, $\triangle TNQ = \triangle TPQ$ по второму признаку ($\angle PQT = \angle NQT = 30°$, TQ — общая сторона, $\angle PTQ = \angle QNT = 90°$, так как $O_2T \perp NP$). Значит, $\angle QPT = \angle QNT = \frac{180° - \angle NQP}{2} = 60°$. Следовательно, $\triangle NQP$ — равносторонний. У равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают, следовательно, O_2 — центр описанной окружности $\triangle QNP$, QO_2 — радиус. Значит, искомый радиус равен 34.

Ответ: 34.

Решение варианта 27

21. $\begin{cases} y^2 = 8x + 12, \\ 2x^2 - y^2 - 2x = 0. \end{cases}$

Подставим y^2 из первого уравнения системы во второе. Получим

$\begin{cases} 2x^2 - 2x - (8x + 12) = 0, \\ y^2 = 8x + 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ y^2 = 8x + 12; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1, x = 6, \\ y^2 = 8x + 12. \end{cases}$

Разберем два случая.
1) $x = -1, y^2 = 8 \cdot (-1) + 12 = 4,\ y = \pm 2$, решения $(-1; -2);\ (-1; 2)$.
2) $x = 6,\ y^2 = 8 \cdot 6 + 12,\ y^2 = 60,\ y = \pm 2\sqrt{15}$, решения $(6; -2\sqrt{15}),\ (6; 2\sqrt{15})$.

Ответ: $(6; -2\sqrt{15}),\ (6; 2\sqrt{15}),\ (-1; 2),\ (-1; -2)$.

22. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде, $(x - 4)$ км/ч — скорость теплохода против течения, $(x + 4)$ км/ч — скорость лодки по течению реки. Так как стоянка длилась 15 часов, то теплоход двигался 15 часов. Время движения теплохода по течению $\dfrac{221}{x+4}$ ч, против течения — $\dfrac{221}{x-4}$ ч, поэтому $\dfrac{221}{x+4} + \dfrac{221}{x-4} = 15,\ 15x^2 - 442x - 15 \cdot 16 = 0, x_1 = 30, x_2 = -\dfrac{8}{15}$. Так как $x > 0$, то $x = 30$. Значит, скорость теплохода в неподвижной воде равна 30 км/ч.

Ответ: 30.

23. Построим график заданной функции. На каждом из указанных промежутков это будет часть прямой, для построения которой достаточно найти две различные точки, через которые проходит эта прямая. Проводим через них прямую и оставляем только те точки прямой, которые принадлежат графику.

При $x < -3$, $y = x - 4$. Находим точки графика с абсциссами $x = -4$ и $x = -3$. Получим точки $(-4; -8)$ и $(-3; -7)$. Оставим от прямой $y = x - 4$ только точки с абсциссами, меньше -3. Получим луч с выколотым началом в точке $(-3; -7)$ (см. рис. 80).

Аналогично, при $-3 \leqslant x \leqslant 0$ находим точки с абсциссами $x = -3$ и $x = 0$. $y(-3) = -3{,}5 \cdot (-3) - 4{,}5 = 10{,}5 - 4{,}5 = 6$; $y(0) = -3{,}5 \cdot 0 - 4{,}5 = -4{,}5$.

Получим точки $(-3; -6)$ и $(0; -4{,}5)$. Оставим от прямой $y = -3{,}5x - 4{,}5$ только точки с абсциссами $3 \leqslant x \leqslant 0$. Получим отрезок с концами в точках $(-3; 6)$ и $(0; -4{,}5)$ (см. рис. 80).

При $x > 0$ находим точки графика с абсциссами $x = 0$ и $x = 2$. $y(0) = 2{,}5 \cdot 0 - 4{,}5 = -4{,}5$; $2{,}5 \cdot 1 - 4{,}5 = -2$.

Получим точки $(0; -4{,}5)$ и $(1; -2)$. Оставим от прямой $y = 2{,}5x - 3{,}5$ только точки с абсциссами $x > 0$. Получим луч с выколотым началом в точке $(0; -4{,}5)$ и проходящим через точку $(1; -2)$ (см. рис. 80).

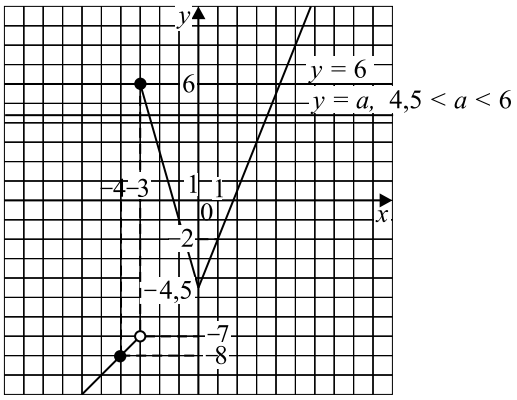


Рис. 80

По графику определим, что ровно две общие точки прямая $y = a$, параллельная оси oX, имеет с графиком при $a \in (-4{,}5; 6]$.

Ответ: $(-4{,}5; 6]$.

24. 1. Пусть длины указанных в условии дуг равны соответственно $12t$, $43t$ и $17t$, где t — некоторое положительное действительное число. Тогда длина всей дуги окружности равна $12t + 43t + 17t = 72t$.

2. Рассмотрим пропорцию:

$$\begin{array}{r} 72t — 360^\circ \\ t — \quad x^\circ \end{array}$$

Отсюда $x = \dfrac{t \cdot 360^\circ}{72t} = 5^\circ$.

Поэтому

$$\begin{array}{r} 12t — \ 12{\cdot}5^\circ = 60^\circ \\ 43t — 43{\cdot}5^\circ = 215^\circ \\ 17t — \ 17{\cdot}5^\circ = 85^\circ \end{array}$$

Согласно условию, опишем около $\triangle ABC$ окружность с центром O (см. рис. 81).

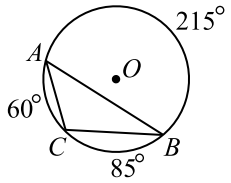


Рис. 81

Заметим, что наименьшей стороной является AC, лежащая против угла B, опирающегося на дугу в 60°. Поэтому $\angle B = 30^\circ$.

3. По теореме синусов для треугольника ABC получаем

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = 2R,\ \frac{21}{\frac{1}{2}} = 2R,\ 2 \cdot 21 = 2R,\ R = 21.$$

Ответ: 21.

25. $AN = \dfrac{MN}{2} = NP$ (см. рис. 82), значит $\triangle ANP$ — равнобедренный треугольник и $\angle NAP = \angle NPA$, как углы при основании равнобедренного треугольника.

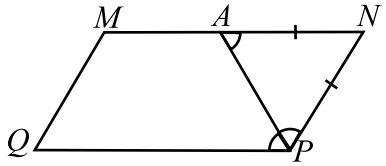
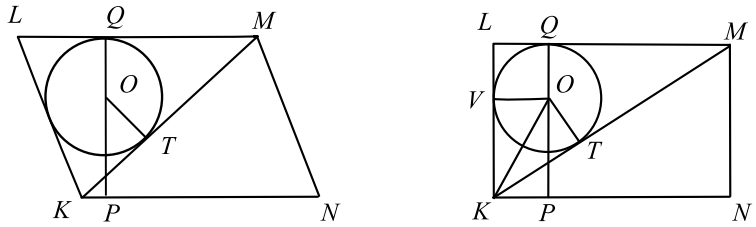


Рис. 82

Но $\angle NAP = \angle APQ$ как накрест лежащие при параллельных прямых MN и PQ и секущей AP. Отсюда $\angle APN = \angle APQ$ и AP — биссектриса $\angle QPN$.

26. Заметим, что расстояние от точки O до прямой KM равно радиусу окружности, вписанной в $\triangle KLM$ (см. рис. 83 а)). Значит, радиус окружности равен 5. Через точку O проведём высоту параллелограмма QP, так что точка Q лежит на прямой LM, а точка P — на прямой KN. По условию $OP = 12$.

Также по условию $OK = 13$, тогда из прямоугольного треугольника OKP по теореме Пифагора $KP = \sqrt{OK^2 - OP^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, то есть KP равно радиусу вписанной



а) *б)*

Рис. 83

окружности треугольника KLM. Заметим, что прямая, проходящая через точку K и перпендикулярная KN, касается окружности, значит, она совпадает с прямой KL. Но тогда угол LKP — прямой и параллелограмм $KLMN$ является прямоугольником (см. рис. 83 б)).

Рассмотрим прямоугольный треугольник KLM. Пусть OT — радиус окружности, перпендикулярный KM, OV — радиус окружности, перпендикулярный KL. По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки, $KT = KV = 12$, $LV = LQ = 5$, $QM = MT$. По теореме Пифагора для треугольника KLM получим, что $KM^2 = KL^2 + LM^2$, $(12 + MT)^2 = 17^2 + (5 + MT)^2$, $144+24MT+MT^2 = 289+25+10MT+MT^2, 14MT = 170, MT = \frac{85}{7}, LM = 5+\frac{85}{7} = \frac{120}{7}$.

$S_{KLMN} = LM \cdot LK = \frac{120}{7} \cdot 17 = \frac{2040}{7} = 291\frac{3}{7}$.

Ответ: $291\frac{3}{7}$.

Решение варианта 28

21. Упростим второе уравнение системы при условии $y \neq 2$. Получим $x - y + 2 = 5(y - 2),\ x - 6y + 12 = 0$.

Из первого уравнения системы следует, что $y + 1 = 0,\ y = -1$ или $x - 12 = 0$, $x = 12$. Разберем два случая.

1) $\begin{cases} y = -1, \\ x - 6y + 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x - 6 \cdot (-1) + 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -18, \\ y = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 12, \\ x - 6y + 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 12, \\ 12 - 6y + 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 12, \\ y = 4. \end{cases}$

Ответ: $(-18; -1); (12; 4)$.

22. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде, $(x - 3)$ км/ч — скорость теплохода против течения, $(x + 3)$ км/ч — скорость лодки по течению реки. Так как стоянка длилась 12 часов, то теплоход двигался 16 часов. Время движения теплохода по течению $\frac{189}{x+3}$ ч, против течения — $\frac{189}{x-3}$ ч, поэтому $\frac{189}{x+3} + \frac{189}{x-3} = 16, 16x^2 - 2 \cdot 189x - 9 \cdot 16 = 0, x_1 = 24, x_2 = -\frac{3}{8}$. Так как $x > 0$, то $x = 24$. Значит, скорость теплохода в неподвижной воде равна 24 км/ч.

Ответ: 24.

23. Построим график заданной функции. На каждом из указанных промежутков это будет часть прямой, для построения которой достаточно найти две различные точки, через

которые проходит эта прямая. Проводим через них прямую и оставляем только те точки, которые принадлежат графику.

При $x < -5$, $y = x-3$. Находим точки графика с абсциссами $x = -6$ и $x = -5$. Получим точки $(-6; -9)$ и $(-5; -8)$. Оставим от графика $y = x - 3$ только точки с абсциссами, меньше -5.

Получим луч с выколотым началом в точке $(-5; -8)$ (см. рис. 84).

Аналогично, при $-5 \leqslant x \leqslant 2$ находим точки графика с абсциссами $x = -5$ и $x = 2$.

$y(-5) = -1{,}5 \cdot (-5) - 2{,}5 = 7{,}5 - 2{,}5 = 5$; $y(2) = -1{,}5 \cdot 2 - 2{,}5 = -3 - 2{,}5 = -5{,}5$.

Получим точки $(-5; 5)$ и $(2; -5{,}5)$. Оставим от прямой $y = -1{,}5x - 2{,}5$ только точки с абсциссами $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

Получим отрезок с концами в точках $(-5; 5)$ и $(2; -5{,}5)$ (см. рис. 84).

При $x > 2$ находим точки графика с абсциссами $x = 2$ и $x = 3$. $y(2) = 2{,}5 \cdot 2 - 3{,}5 = 1{,}5$, $y(3) = 2{,}5 \cdot 3 - 3{,}5 = 7{,}5 - 3{,}5 = 4$. Получим точки $(2; 1{,}5)$ и $(3; 4)$. Оставим от прямой $y = 2{,}5x - 3{,}5$ только точки с абсциссами, больше 2. Получим луч с выколотым началом в точке $(2; 1{,}5)$ и проходящей через точку $(3; 4)$ (см. рис. 84).

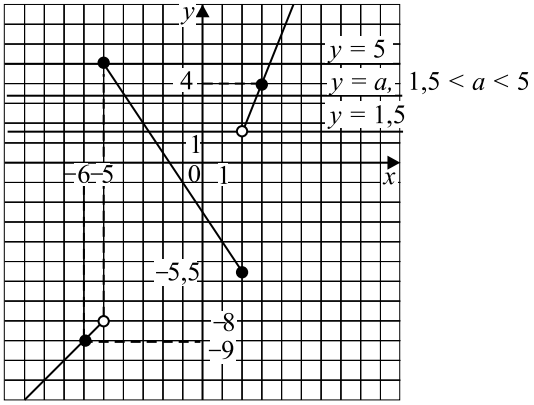


Рис. 84

По графику определяем, что ровно две общие точки прямая $y = a$, параллельная оси Ox, имеет с графиком при $a \in (1{,}5; 5]$.

Ответ: $(1{,}5; 5]$.

24. 1. Пусть длины указанных в условии дуг равны соответственно $4t$, $9t$ и $11t$, где t — некоторое положительное действительное число. Тогда длина всей дуги окружности равна $4t + 9t + 11t = 24t$.

2. Рассмотрим пропорцию:

$$\begin{array}{rl} 24t & — 360^\circ \\ t & — \quad x^\circ \end{array}$$

Отсюда $x = \dfrac{t \cdot 360^\circ}{24t} = 15^\circ$.

Поэтому

$$\begin{array}{rl} 4t & — \ 4{\cdot}15^\circ = 60^\circ \\ 9t & — 9{\cdot}15^\circ = 135^\circ \\ 11t & — \ 11{\cdot}15^\circ = 165^\circ \end{array}$$

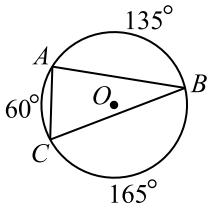


Рис. 85

Согласно условию, опишем около $\triangle ABC$ окружность с центром O (см. рис. 85).

Заметим, что наименьшей стороной является AC, лежащая против угла B, опирающегося на дугу в 60°. Поэтому $\angle B = 30°$.

3. По теореме синусов для треугольника ABC получаем

$$\frac{AC}{\sin 30°} = 2R,\ \frac{AC}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 14,\ 2AC = 2 \cdot 14,\ AC = 14.$$

Ответ: 14.

25. $EQ = \frac{PQ}{2} = QK$ (см. рис. 86), значит $\triangle EQK$ — равнобедренный и $\angle QEK = \angle QKE$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

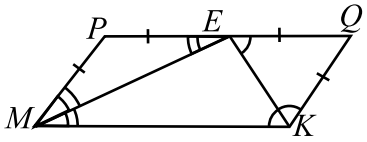


Рис. 86

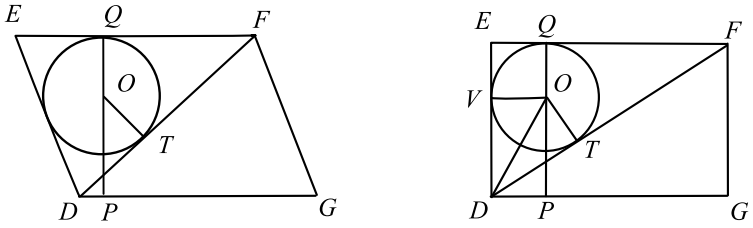
$\angle QEK = \angle EKM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых PQ и MK и секущей EK, значит KE — биссектриса $\angle QKM$.

Докажем, что ME — биссектриса $\angle PMK$. $PE = \frac{PQ}{2} = MP$, значит, $\triangle MPE$ — равнобедренный и $\angle PME = \angle PEM$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle PEM = \angle EMK$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых PQ и MK и секущей ME, значит, ME — биссектриса $\angle PMK$.

$\angle PMK + \angle MKQ = 180°$, а ME и KE — биссектрисы этих углов, тогда $\angle EMK + \angle EKM = 90°$ (как половины двух углов, которые в сумме дают 180°).

Отсюда в треугольнике MEK угол $MEK = 90°$.

26. Заметим, что расстояние от точки O до прямой DF равно радиусу окружности, вписанной в $\triangle DEF$ (см. рис. 87а). Значит, радиус окружности равен 8. Через точку O проведём высоту параллелограмма QP, так что точка Q лежит на прямой EF, а точка P — на прямой DG. По условию $OP = 15$.



а) *б)*

Рис. 87

Также по условию $OD = 17$, тогда из прямоугольного треугольника ODP по теореме Пифагора $DP = \sqrt{OD^2 - OP^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, то есть DP равно радиусу вписанной окружности треугольника DEF. Заметим, что прямая, проходящая через точку D и перпендикулярная DG, касается окружности, значит, она совпадает с прямой DE. Но тогда угол EDP — прямой и параллелограмм $DEFG$ является прямоугольником (см. рис. 87б).

Рассмотрим прямоугольный треугольник DEF. Пусть OT — радиус окружности, перпендикулярный DF, OV — радиус окружности, перпендикулярный DE. По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки, $DT = DV = 15$, $EV = EQ = 8$, $QF = FT$. По теореме Пифагора для треугольника DEF получим, что $DF^2 = DE^2 + EF^2$, $(15 + FT)^2 = 23^2 + (8 + FT)^2$, $225 + 30FT + FT^2 = 529 + 64 + 16FT + FT^2$, $14FT = 368$, $FT = \frac{184}{7}$, $EF = 8 + \frac{184}{7} = \frac{240}{7}$.

$S_{DEFG} = EF \cdot ED = \frac{240}{7} \cdot 23 = \frac{5520}{7} = 788\frac{4}{7}$.

Ответ: $788\frac{4}{7}$.

Решение варианта 30

21. Решим первое неравенство системы $\frac{2 + 5x}{13 + (9 + 2x)^2} \geqslant 0$.

Знаменатель дроби положителен при любом значении x, поэтому первое неравенство равносильно неравенству $2 + 5x \geqslant 0$, то есть $5x \geqslant -2$, $x \geqslant -0{,}4$.

Решим второе неравенство системы.

$7 + 8x \leqslant 3(2x + 9)$, $7 + 8x \leqslant 6x + 27$, $2x \leqslant 20$, $x \leqslant 10$.

Решим систему $\begin{cases} x \leqslant 10, \\ x \geqslant -0{,}4. \end{cases}$

Получаем $x \in [-0{,}4; 10]$.

Ответ: $[-0{,}4; 10]$.

22. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, а $\frac{192}{x}$ ч — время, за которое он совершил пробег; $(x + 4)$ км/ч — скорость первого велосипедиста, $\frac{192}{x + 4}$ ч — время, за которое он совершил пробег. Так как первый велосипедист прибывает к финишу на 4 часа раньше второго, то составим и решим уравнение: $\frac{192}{x} - \frac{192}{x + 4} = 4$.

$\frac{48}{x} - \frac{48}{x + 4} = 1, 192 = x^2 + 4x, x^2 + 4x - 192 = 0, x_1 = -16, x_2 = 12$.

x_1 не удовлетворяет условию задачи, следовательно, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

23. Построим график заданной функции.

При $x > -5$ график представляет собой часть параболы $y = x^2 + 8x + 16$, $y = (x + 4)^2$, $(y(-5) = 1)$. Он получается параллельным переносом влево вдоль оси Ox на четыре единицы параболы $y = x^2$. Оставляем от него только точки с абсциссами $x > -5$ (см. рис. 88).

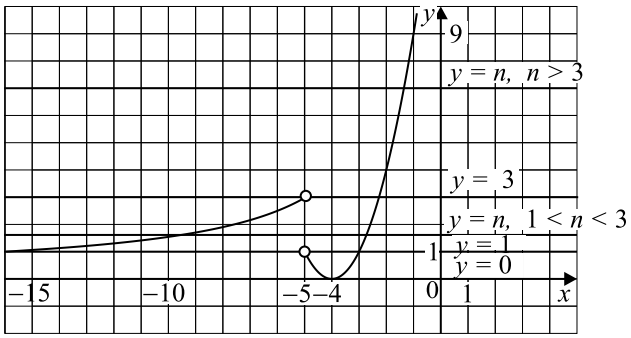


Рис. 88

При $x < -5$ график представляет собой часть верхней ветви гиперболы $y = \dfrac{-15}{x}$.

$y(-5) = \dfrac{-15}{-5} = 3$, $y(-10) = 1{,}5$, $y(-15) = 1$ (см. рис. 88).

По рисунку определим, что прямая $y = n$ имеет с графиком одну общую точку при $n = 0$, $n > 3$; ровно две — при $1 \leqslant n < 3$.

Ответ: $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

24. Согласно условию, построим $\triangle ABC$ и впишем в него окружность с центром O (см. рис. 89).

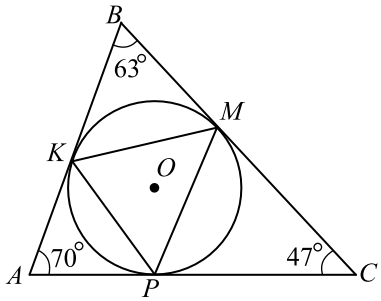


Рис. 89

1. По свойству касательных, проведённых из одной точки к окружности получаем, что треугольник AKP является равнобедренным. Поэтому углы K и P при его основании KP равны.

2. Сумма внутренних углов треугольника AKP равна $180°$, поэтому $\angle AKP = \dfrac{1}{2} \cdot (180° - 70°) = 55°$.

3. Угол AKP между касательной AK и хордой KP измеряется половиной дуги KP, поэтому градусная мера дуги KP равна $2 \cdot 55° = 110°$. Угол KMP вписан в окружность и опирается на дугу KP, поэтому он измеряется половиной этой дуги и равен $55°$.

Аналогично убеждаемся, что $\angle PKM = \dfrac{1}{2} \cdot (180° - 47°) = 66{,}5°$ и $\angle KPM = \dfrac{1}{2} \cdot (180° - 63°) = 58{,}5°$.

Ответ: 55; 66,5; 58,5.

25. Рассмотрим рисунок 90.

В треугольниках AMC и DMB угол M — общий, $\angle MAC$ измеряется половиной дуги BC, и $\angle MDB$ измеряется половиной этой же дуги BC, то $\angle MAC = \angle MDB$.

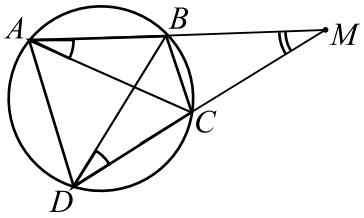


Рис. 90

Следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle BMD$ по двум углам.

26. Так как сумма углов при основании равна 90°, то оба этих угла — острые. Значит, это углы при большем основании (см. рис. 91).

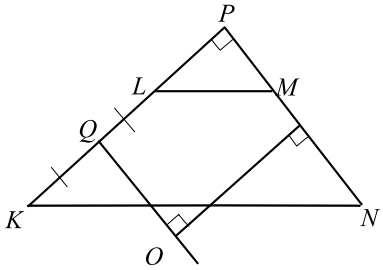


Рис. 91

Пусть P — точка пересечения продолжений боковых сторон. Тогда из $\triangle PKN$ найдём $\angle KPN$: $\angle KPN = 180° - (\angle PKN + \angle PNK) = 90°$. Следовательно, $\triangle PKN$ — прямоугольный.

$\triangle PLM \sim \triangle KPN$ по двум углам ($\angle P$ — общий, $\angle PLM = \angle PKN$ как соответственные углы при параллельных прямых LM и KN и секущей PK). Отсюда $\dfrac{KN}{LM} = \dfrac{PK}{PL}$, $\dfrac{80}{10} = \dfrac{PL+56}{PL}$, $\dfrac{PL+56}{PL} = 8$, $PL = 8$.

Центр O рассматриваемой окружности равноудалён от точек K и L, следовательно, он лежит на серединном перпендикуляре отрезка KL. Пусть Q — середина KL, $QL = 28$. Так как $QO \perp KP$ и $NP \perp KP$, то $QO \parallel PN$. Но окружность с центром O должна касаться стороны PN, а радиус, проведённый в точку касания, должен быть перпендикулярен PN, а значит, OQ, то есть радиус равен расстоянию между параллельными прямыми QO и PN, то есть равен QP. В свою очередь, $QP = PL + QL = 36$.

Ответ: 36.

Решение варианта 31

21. Решим первое неравенство системы $(x+8)(x-9) < 0$.

Найдем нули левой части.

$(x+8)(x-9) = 0,\ x_1 = -8,\ x_2 = 9$.

На рисунке 92 изображены знаки левой части неравенства.

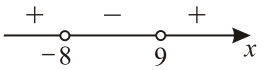


Рис. 92

Решение неравенства $-8 < x < 9$.

Решим второе неравенство системы.

$6x - 4 > 16x - 4(7x - 8),\ 6x - 4 > 16x - 28x + 32,\ 18x > 36,\ x > 2$.

Решим систему $\begin{cases} -8 < x < 9, \\ x > 2 \end{cases}$ (см.рис. 93).

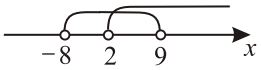


Рис. 93

Получаем $x \in (2; 9)$.

Ответ: $(2; 9)$.

22. Пусть x км/ч — скорость туриста на спуске, $(x - 4)$ км/ч — скорость туриста на подъёме. Подъём занял 5 часов, а спуск — 1 час, поэтому спуск составляет x км, а подъём — $5(x - 4)$ км. Так как длина дороги равна 16 км, то составим и решим уравнение $x + 5(x - 4) = 16, 6x = 36, x = 6$ (км/ч). Итак, скорость туриста на спуске 6 км/ч.

Ответ: 6.

23. Построим график заданной функции.

Если $x \geqslant 0$, то $y = \dfrac{2x - 1}{x - 2x^2}$. Упростим выражение при $x \neq 0$, $x \neq 0{,}5$. $\dfrac{2x - 1}{x - 2x^2} = \dfrac{2(x - 0{,}5)}{-2x(x - 0{,}5)} = -\dfrac{1}{x}$. $y = -\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $x \neq -0{,}5$, $y(0{,}5) = -2$. Графиком является нижняя ветвь гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $(0{,}5; -2)$ (см. рис. 94).

Если $x < 0$, то $y = \dfrac{-2x - 1}{-x - 2x^2}$. Упростим выражение при $x \neq 0$, $x \neq -0{,}5$. $\dfrac{-2x - 1}{-x - 2x^2} = \dfrac{-2(x + 0{,}5)}{-2x(x + 0{,}5)} = \dfrac{1}{x}$. $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $x \neq -0{,}5$, $y(-0{,}5) = -2$. Графиком является нижняя ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-0{,}5; -2)$ (см. рис. 94).

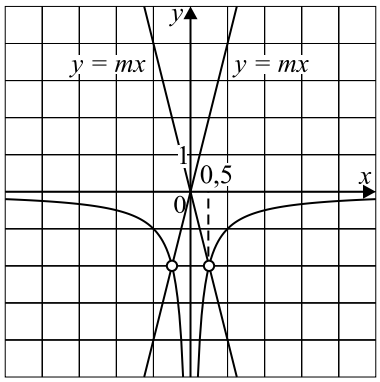


Рис. 94

По графику определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = mx$, проходящей через начало координат, ни одной общей точки, если прямая проходит через точки $(0{,}5; -2)$, $(-0{,}5; -2)$ или прямая совпадает с осью Ox. Точки $(0{,}5; -2)$, $(-0{,}5; -2)$ принадлежат прямой $y = mx$, тогда $-2 = m \cdot 0{,}5$ и $m = -4$; $-2 = m(-0{,}5)$ и $m = 4$.

Таким образом прямая $y = mx$ не имеет общих точек с графиком заданной функции при $m = 0$, $m = -4$, $m = 4$.

Ответ: -4; 0;4.

24. Построим ромб $ABCD$, проведём его диагонали и впишем в него окружность (см. рис. 95). Отметим, что точка O является центром окружности, вписанной в ромб, а расстояние от точки O до стороны ромба BC равно радиусу этой окружности. Указанным радиусом будет отрезок OH, где H точка касания окружности со стороной BC. По условию $OH = 14\sqrt{2}$.

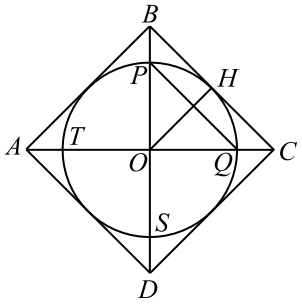


Рис. 95

1. Пусть P, Q, S и T — точки пересечения окружности с диагоналями ромба (см. рис. 95). Тогда наименьшим расстоянием, указанным в условии будет длина отрезка PQ.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого катеты являются радиусами окружности. По теореме Пифагора для треугольника POQ получаем

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{(14\sqrt{2})^2 + (14\sqrt{2})^2} = \sqrt{14^2 \cdot 4} = 14 \cdot 2 = 28.$$

Ответ: 28.

25. $\angle BCA = \angle CAD$ — как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC (см. рис. 96).

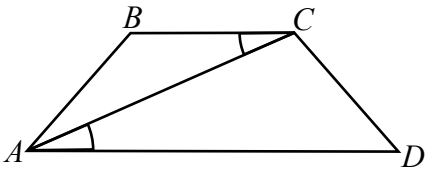


Рис. 96

$\frac{BC}{AC} = \frac{12}{18}$, $\frac{AC}{AD} = \frac{18}{27}$, то есть $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}$.

Следовательно: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ по второму признаку подобия.

26. Изобразим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD, где $BC < AD$ (см. рис. 97), K — точка пересечения диагоналей, MN — отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей.

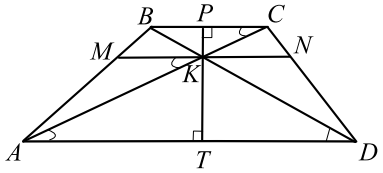


Рис. 97

Заметим, что $\triangle BCK \sim \triangle DAK$ по второму признаку ($\angle BKC = \angle DKA$ как вертикальные, $\angle KAD = \angle KCB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC).

Соответствующие высоты подобных треугольников относятся так же, как и стороны треугольников. Проведём высоты KP и KT.

Тогда $\frac{KP}{KT} = \frac{BK}{DK} = \frac{CK}{AK} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{7}$. Пусть $KP = 2x$, следовательно, $KT = 7x$. Отсюда $PT = 9x$. Значит, $KP = \frac{2}{9}PT$, $KT = \frac{7}{9}PT$. Аналогично, $\frac{AK}{AC} = \frac{7}{9}$, $\frac{DK}{DB} = \frac{7}{9}$.

$\triangle AMK \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle MAK$ — общий, $\angle AKM = \angle ACB$ как соответственные углы при параллельных прямых MK и BC и секущей AC), тогда $\frac{MK}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{7}{9}$. Тогда $MK = \frac{7}{9}BC$.

Аналогично $\triangle DNK \sim \triangle DCB$, тогда $\frac{NK}{BC} = \frac{DK}{DB} = \frac{7}{9}$. Тогда $NK = \frac{7}{9}BC$.

Следовательно, $MN = \frac{7}{9}BC + \frac{7}{9}BC = \frac{14}{9}BC$.

$S_{MBCN} = \frac{BC + MN}{2} \cdot PK$;

$S_{AMND} = \frac{MN + AD}{2} \cdot KT$.

Используя тот факт, что $AD = \frac{7}{2}BC$, получим, что

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{BC + MN}{2} \cdot PK}{\frac{MN + AD}{2} \cdot KT} = \frac{(BC + MN) \cdot PK}{(MN + AD) \cdot KT} =$$

$$= \frac{\left(BC + \frac{14}{9}BC\right) \cdot \frac{2}{9}PT}{\left(\frac{14}{9}BC + \frac{7}{2}BC\right) \cdot \frac{7}{9}PT} = \frac{\left(1 + \frac{14}{9}\right) \cdot 2}{\left(\frac{14}{9} + \frac{7}{2}\right) \cdot 7} = \frac{92}{637}.$$

Ответ: $\frac{92}{637}$.

Решение варианта 32

21. Решим первое неравенство системы $(x + 3)(2x - 4) > 0$.

Найдем нули левой части.

$(x + 3)(2x - 4) = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 2$.

На рисунке 98 изображены знаки левой части неравенства.

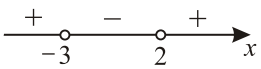


Рис. 98

Решение неравенства $x < -3,\ x > 2$.

Решим второе неравенство системы.

$6x - 24 > x - 5x - 20,\ 10x > 4,\ x > 0{,}4$.

Решим систему $\begin{cases} x < -3,\ x > 2, \\ x > 0{,}4 \end{cases}$ (см.рис. 99).

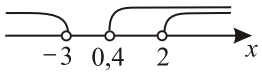


Рис. 99

Получаем $x \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

22. Пусть x км/ч — скорость туриста на спуске, $(x - 3)$ км/ч — скорость туриста на подъёме. Подъём занял 4 часа, а спуск — 2 часа, поэтому спуск составляет $2x$ км, а подъём — $4(x - 3)$ км. Так как длина дороги равна 24 км, то составим и решим уравнение $2x + 4(x - 3) = 24$, $6x = 36$, $x = 6$ (км/ч). Итак, скорость туриста на спуске 6 км/ч.

Ответ: 6.

23. Построим график заданной функции.

Если $x \geqslant 0$, то $y = \dfrac{3x - 9}{x^2 - 3x}$. Упростим выражение при $x \neq 0$, $x \neq 3$. $\dfrac{3x - 9}{x^2 - 3x} = \dfrac{3(x - 3)}{x(x - 3)} = \dfrac{3}{x}$. $y = \dfrac{3}{x}$ при $x \neq 0$, $x \neq 3$, $y(3) = 1$. Графиком является верхняя ветвь гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ с выколотой точкой $(3; 1)$ (см. рис. 100).

Если $x < 0$, то $y = \dfrac{-3x - 9}{x^2 + 3x}$. Упростим выражение при $x \neq 0$, $x \neq -3$. $\dfrac{-3x - 9}{x^2 + 3x} = \dfrac{-3(x + 3)}{x(x + 3)} = -\dfrac{3}{x}$. $y = -\dfrac{3}{x}$, $y(-3) = 1$. Графиком является верхняя ветвь гиперболы $y = -\dfrac{3}{x}$ с выколотой точкой $(-3; 1)$ (см. рис. 100).

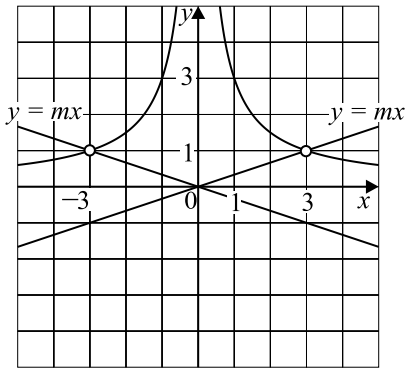


Рис. 100

По графику определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = mx$, проходящей через начало координат, ни одной общей точки, если прямая проходит через точки $(3; 1)$, $(-3; 1)$ или прямая совпадает с осью Ox.

Точки $(3; 1)$ и $(-3; 1)$ принадлежит прямой $y = mx$, тогда $1 = m \cdot 3$ и $m = \dfrac{1}{3}$; $1 = m(-3)$ и $m = -\dfrac{1}{3}$.

Таким образом прямая $y = mx$ не имеет общих точек с графиком заданной функции при $m = 0$, $m = -\frac{1}{3}$ и $m = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}$.

24. Согласно условию, построим ромб $ABCD$, проведём его диагонали и впишем в него окружность с центром O — точке пересечения диагоналей (см. рис. 101). Центром окружности, вписанной в ромб является точка O пересечения его диагоналей, а её радиусом будет расстояние от точки O до любой из сторон ромба. Оно равно длине отрезка OH, где H является точкой касания окружности со стороной BC.

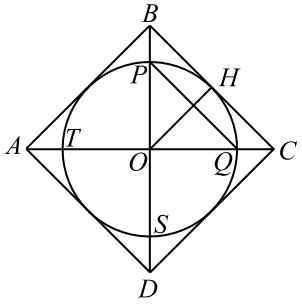


Рис. 101

1. Наименьшим расстоянием между двумя точками P, Q, S и T, лежащими на различных диагоналях ромба будет длина отрезка PQ (см. рис. 101), равная по условию $15\sqrt{2}$.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого катеты являются радиусами окружности. Пусть радиус окружности равен R. По теореме Пифагора для треугольника POQ получаем $PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$.

Отсюда $15\sqrt{2} = R\sqrt{2}$, поэтому $OH = R = 15$,

Ответ: 15.

25. $\angle PNK = \angle NKM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых NP и MK и секущей NK (см. рис. 102).

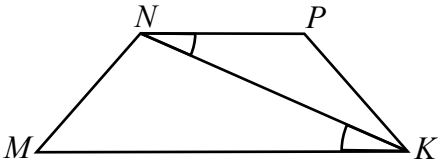


Рис. 102

$NK : MK = NP : KN$, так как $NK : MK = 15 : 25 = 3 : 5$,
$NP : KN = 9 : 15 = 3 : 5$. Значит, треугольники NPK и MNK подобны по второму признаку подобия.

26. Изобразим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD, где $BC < AD$ (см. рис. 103), K — точка пересечения диагоналей, MN — отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей.

Заметим, что $\triangle BCK \sim \triangle DAK$ по второму признаку ($\angle BKC = \angle DKA$ как вертикальные, $\angle KAD = \angle KCB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC).

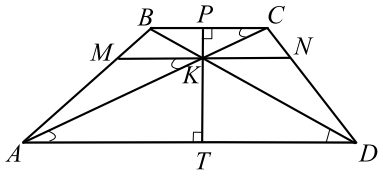


Рис. 103

Соответствующие высоты подобных треугольников относятся так же, как и стороны треугольников. Проведём высоты KP и KT.

Тогда $\frac{KP}{KT} = \frac{BK}{DK} = \frac{CK}{AK} = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}$. Пусть $KP = 3x$, следовательно, $KT = 5x$. Отсюда $PT = 8x$. Значит, $KP = \frac{3}{8}PT$, $KT = \frac{5}{8}PT$. Аналогично, $\frac{AK}{AC} = \frac{5}{8}$, $\frac{DK}{DB} = \frac{5}{8}$.

$\triangle AMK \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle MAK$ — общий, $\angle AKM = \angle ACB$ как соответственные углы при параллельных прямых MK и BC и секущей AC), тогда $\frac{MK}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{5}{8}$. Тогда $MK = \frac{5}{8}BC$.

Аналогично $\triangle DNK \sim \triangle DCB$, тогда $\frac{NK}{BC} = \frac{DK}{DB} = \frac{5}{8}$. Тогда $NK = \frac{5}{8}BC$.

Следовательно, $MN = \frac{5}{8}BC + \frac{5}{8}BC = \frac{5}{4}BC$.

$S_{MBCN} = \frac{BC + MN}{2} \cdot PK$;

$S_{AMND} = \frac{MN + AD}{2} \cdot KT$.

Используя тот факт, что $AD = \frac{5}{3}BC$, получим, что

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{BC + MN}{2} \cdot PK}{\frac{MN + AD}{2} \cdot KT} = \frac{(BC + MN) \cdot PK}{(MN + AD) \cdot KT} =$$

$$= \frac{\left(BC + \frac{5}{4}BC\right) \cdot \frac{3}{8}PT}{\left(\frac{5}{4}BC + \frac{5}{3}BC\right) \cdot \frac{5}{8}PT} = \frac{\left(1 + \frac{5}{4}\right) \cdot 3}{\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{3}\right) \cdot 5} = \frac{81}{175}.$$

Ответ: $\frac{81}{175}$.

Решение варианта 34

21. Выполним действия.

$$\frac{2}{7-a} - \frac{2}{7+a} = \frac{2(7+a)}{(7-a)(7+a)} - \frac{2(7-a)}{(7+a)(7-a)} = \frac{14 + 2a - (14 - 2a)}{(49 - a^2)} = \frac{4a}{49 - a^2}.$$

$$\frac{49}{a^3 - 49a} : \frac{4a}{49 - a^2} = \frac{49}{a(a^2 - 49)} : \frac{4a}{-(a^2 - 49)} = \frac{49}{a(a^2 - 49)} \cdot \frac{-(a^2 - 49)}{4a} = \frac{-49}{4a^2}.$$

При $a=-35$ получим $\dfrac{-49}{4\cdot(-35)^2}=-0{,}01$.

Ответ: $-0{,}01$.

22. Пусть x км/ч — скорость первого теплохода, $(x+2)$ км/ч — скорость второго теплохода. Время движения первого теплохода $\dfrac{220}{x}$ ч, второго — $\dfrac{220}{x+2}$ ч, поэтому $\dfrac{220}{x}-\dfrac{220}{x+2}=1$, $x^2+2x-440=0$, $x_1=20$, $x_2=-22$. Так как $x>0$, то $x=20$. Значит, скорость первого теплохода равна 20 км/ч.

Ответ: 20.

23. Построим график заданной функции.

Если $4x+3\geqslant 0$, то есть $x\geqslant\dfrac{-3}{4}$, $x\geqslant -0{,}75$, то $y=x^2-4x-3$, $x\geqslant -0{,}75$.

Ветви параболы $y=x^2-4x+3$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна 2 и $-\dfrac{3}{4}<2$. Поэтому правая ветвь параболы с вершиной $(2;-7)$ полностью принадлежит графику. От левой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $-0{,}75<x<2$. Заметим, что $y(-0{,}75)=\dfrac{9}{16}$ (см. рис. 104).

Если $4x+3<0$, то есть $x<-0{,}75$, то $y=x^2+4x+3$, $x<-0{,}75$.

Ветви параболы $y=x^2+4x+3$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна -2 и $-2<-0{,}75$. Поэтому левая ветвь параболы $y=x^2+4x+3$ с вершиной $(-2;-1)$ полностью принадлежит графику. От правой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $-2<x<-0{,}75$. Заметим, что $y(-0{,}75)=\dfrac{9}{16}$ (см. рис. 104).

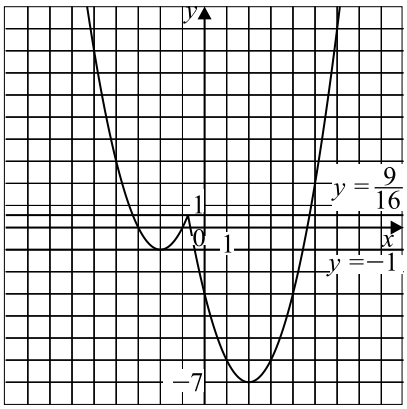


Рис. 104

По рисунку определим, что прямая $y=a$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком заданной функции ровно три точки при $a=\dfrac{9}{16}$ и $a=-1$.

Ответ: -1; 0,5625.

24. Согласно условию, построим окружность, проведём хорду BC, концы которой соединим с точкой A (см. рис. 105).

1. Четырёхугольник $BKPC$ вписан в окружность. Поэтому сумма его противоположных углов равна 180°. Пусть $\angle B=\beta^\circ$, тогда $\angle KPC=180^\circ-\beta^\circ$, а $\angle KPA=180^\circ-(180^\circ-\beta^\circ)=\beta$. Значит $\angle B=\angle KPA$.

Аналогично убеждаемся, что $\angle C=\angle PKA$.

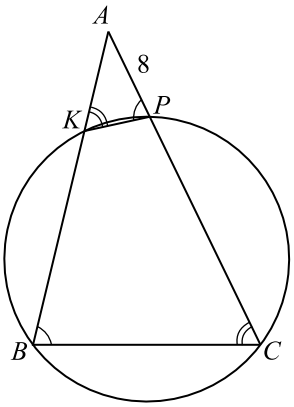


Рис. 105

2. Из сказанного следует, что $\triangle ABC \sim \triangle KPA$ (по двум углам). Из подобия следует, что

$\frac{KP}{PA} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда по условию получаем $\frac{KP}{8} = \frac{BC}{\frac{5}{4} \cdot BC}$; $\frac{BC}{\frac{5}{4}BC} = \frac{4}{5}$,

$KP = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6{,}4$, $KP = 6{,}4$.

Ответ: 6,4.

25. $\angle LMK = \angle LNK$ (см. рис. 106), поэтому точки L, M, K, N лежат на одной окружности (на основании признака вписанного в окружность выпуклого четырёхугольника).

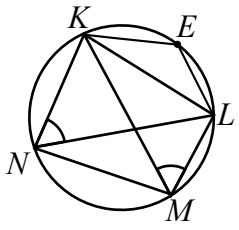


Рис. 106

Приведём доказательства этого признака.

Опишем около $\triangle KLM$ окружность и на дуге KL отметим произвольную точку E. По построению четырёхугольник $KELM$ вписан в окружность, поэтому $\angle KEL + \angle KML = 180°$. По условию $\angle LMK = \angle LNK$, поэтому $\angle KEL + \angle LNK = 180°$. Значит, в четырёхугольнике $LNKE$ сумма противоположных углов $\angle KEL$ и $\angle LNK$ равна 180°, а следовательно, четырёхугольник $LNKE$ — вписанный. Отсюда, точки L, M, K, N лежат на одной окружности.

Учитывая, что $KLMN$ — вписанный четырёхугольник, вписанные $\angle LKM$ и $\angle LNM$ опираются на одну и ту же дугу, значит они равны.

26. Изобразим параллелограмм $ABCD$ и ромб $KLMN$ согласно условию (см. рис. 107), так что $AC : BD = 7 : 3$. Пусть S — площадь параллелограмма.

Заметим, что $\triangle BKL \sim \triangle BAC$ по второму признаку ($\angle B$ — общий, $\angle BKL = \angle BAC$ как соответственные углы при параллельных прямых KL и AC и секущей AB). Тогда $\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{AB}$. Значит, $KL = \frac{BK \cdot AC}{AB}$.

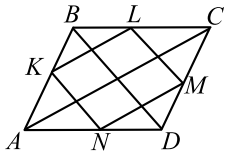


Рис. 107

Аналогично $\triangle AKN \sim \triangle ABD$ по второму признаку ($\angle A$ — общий, $\angle AKN = \angle ABD$ как соответственные углы при параллельных прямых KN и BD и секущей AB). Тогда $\frac{KN}{BD} = \frac{AK}{AB}$, $KN = \frac{AK \cdot BD}{AB}$.

По условию $KLMN$ — ромб, поэтому $KL = KN$. Отсюда $\frac{BK \cdot AC}{AB} = \frac{AK \cdot BD}{AB}$, следовательно, $BK \cdot AC = AK \cdot BD$. Так как $AC = \frac{7}{3}BD$, то $BK \cdot \frac{7}{3}BD = AK \cdot BD$, $AK = \frac{7}{3}BK$. С другой стороны, $AK = AB - BK$, поэтому $AB - BK = \frac{7}{3}BK$. Отсюда $BK = \frac{3}{10}AB$, $AK = \frac{7}{10}AB$.

Тогда коэффициент подобия $\triangle BKL$ и $\triangle BAC$ равен $\frac{BK}{AB} = \frac{3}{10}$ и $S_{BKL} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 S_{ABC} = \frac{9}{100}S_{ABC} = \frac{9}{200}S_{ABCD}$.

Коэффициент подобия $\triangle AKN$ и $\triangle ABD$ равен $\frac{AK}{AB} = \frac{7}{10}$ и $AKN = \left(\frac{7}{10}\right)^2 S_{ABD} = \frac{49}{100}S_{ABD} = \frac{49}{200}S_{ABCD}$.

Аналогично $S_{CLM} = S_{AKN} = \frac{49}{200}S_{ABCD}$ и $S_{DNM} = S_{BKL} = \frac{9}{200}S_{ABCD}$.

$S_{KLMN} = S_{ABCD} - S_{CLM} - S_{AKN} - S_{DNM} - S_{BKL} =$
$= S - \frac{49}{200}S_{ABCD} - \frac{49}{200}S_{ABCD} - \frac{9}{200}S_{ABCD} - \frac{9}{200}S_{ABCD} = \frac{21}{50}S_{ABCD}$. Отсюда $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{21}{50}$.

Ответ: $\frac{21}{50}$.

Решение варианта 35

21. Выполним действия.

$\frac{25x - 4y}{5\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = \frac{(5\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2}{5\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = \frac{(5\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(5\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{5\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$.

$\frac{25y - 4x}{5\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} = \frac{(5\sqrt{y})^2 - (2\sqrt{x})^2}{5\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} = \frac{(5\sqrt{y} + 2\sqrt{x})(5\sqrt{y} - 2\sqrt{x})}{5\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} = 5\sqrt{y} + 2\sqrt{x}$.

$5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - (5\sqrt{y} + 2\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

При $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 9$ получим $3 \cdot 9 = 27$.

Ответ: 27.

22. Обозначим расстояние между городами A и B через единицу, время в пути велосипедиста — x ч, мотоциклиста — $(x - 3)$ ч.

Скорость велосипедиста — $\frac{1}{x}$ км/ч, скорость мотоциклиста — $\frac{1}{x-3}$ км/ч.

48 мин $= \frac{4}{5}$ ч.

Так как в момент встречи они суммарно проехали всё расстояние от A до B, имеем уравнение $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}\right) = 1$.

$4(2x-3) = 5(x^2-3x)$, $5x^2-23x+12 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}6$. x_2 не удовлетворяет условию задачи, поэтому велосипедист затратил на путь из B в A 4 часа.

Ответ: 4.

23. Построим график заданной функции.

Если $x+1 \geqslant 0$, $x \geqslant -1$, то $y = x^2 + x - 3x - 1$, $x \geqslant -1$.

Ветви параболы $y = x^2-2x-1$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна 1 и $1 > -1$. Поэтому правая ветвь параболы с вершиной $(-2;1)$ полностью принадлежит графику. От левой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $-1 \leqslant x < 1$. Заметим, что $y(-1) = 2$ (см. рис. 108).

Если $x+1 < 0$, $x < -1$, то $y = x^2 + x + 3x + 5$, $x < -1$.

Ветви параболы $y = x^2 + 4x + 5$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна -2 и $-2 < -1$. Поэтому левая ветвь параболы $y = x^2 + 4x + 5$ с вершиной $(-2;1)$ полностью принадлежит графику. От правой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $-2 \leqslant x < -1$. Заметим, что $y(-1) = 2$ (см. рис. 108).

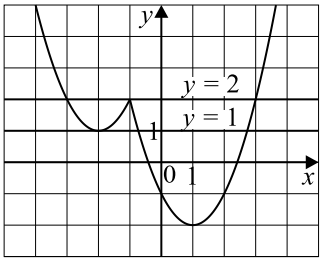


Рис. 108

Из рисунка определяем, что прямая $y = p$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком указанной функции ровно три общие точки при $p = 1$ и $p = 2$.

Ответ: 1; 2.

24. Согласно условию, получим рисунок (см. рис. 109).

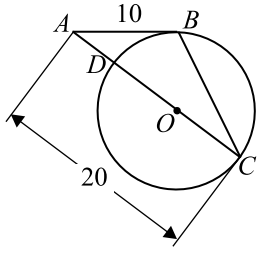


Рис. 109

1. По свойству касательной к окружности и секущей получаем $AB^2 = AC \cdot AD$, $10^2 = 20 \cdot AD$. Отсюда $AD = \frac{100}{20} = 5$.

2. Диаметром окружности является отрезок DC, $DC = AC - AD = 20 - 5 = 15$.

Ответ: 15.

25. Рассмотрим треугольники LN_1F и L_1NF (см. рис. 110), они имеют равные углы: $\angle LFN_1 = \angle NFL_1$ как вертикальные, $\angle LN_1F = \angle NL_1F = 90°$.

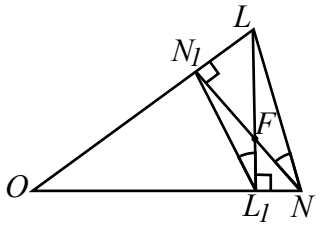


Рис. 110

Отсюда, $\triangle LN_1F \sim \triangle L_1NF$ (по первому признаку подобия).

Из подобия следует: $\dfrac{LF}{NF} = \dfrac{LN_1}{NL_1} = \dfrac{N_1F}{L_1F}$.

В треугольниках N_1FL_1 и NFL: $\angle N_1FL_1 = \angle NFL$ как вертикальные, а $\dfrac{N_1F}{LF} = \dfrac{L_1F}{NF}$, тогда по второму признаку подобия $\triangle N_1FL_1 \sim \triangle NFL$, следовательно, $\angle LL_1N_1 = \angle LNN_1$.

26. Выразим площадь треугольника ABM и площадь четырёхугольника $MTCN$ (см. рис. 111) через площадь треугольника ABC.

Пусть h — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B.

Тогда $S_{BAN} = \dfrac{1}{2}AN \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}AC\right) \cdot h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}AC \cdot h\right) = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

$S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BM \sin\angle ABM = \dfrac{1}{2}AB \cdot \left(\dfrac{5}{7}BN\right) \cdot \sin\angle ABM = \dfrac{5}{7}S_{ABN} = \dfrac{5}{14}S_{ABC}$.

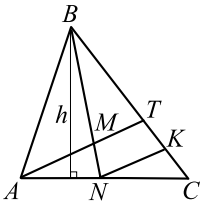


Рис. 111

Найдём площадь $MTCN$.

Проведём NK параллельно MT, точка K лежит на BC .

По теореме Фалеса $CK : KT = CN : NA$, но $CN = NA$, так как BN — медиана $\triangle ABC$. Отсюда $CK = KT$. С другой стороны, по теореме Фалеса $BM : MN = BT : TK$, отсюда $BT : TK = 5 : 2$. Пусть $TK = 2x$, тогда $BT = 5x$, $KC = TK = 2x$. Следовательно, $BT = \dfrac{5}{9}BC$.

Тогда $S_{BMT} = \frac{1}{2}BM \cdot BT \sin\angle MBT = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}BN\right) \cdot \left(\frac{5}{9}BC\right)\sin\angle MBT =$

$= \frac{25}{63}\left(\frac{1}{2}BN \cdot BC \sin\angle MBT\right) = \frac{25}{63}S_{NBC}.$

$S_{MTCN} = S_{NBC} - S_{BMT} = \frac{38}{63}S_{NBC} = \frac{19}{63}S_{ABC}$

Отсюда $\frac{S_{ABM}}{S_{MTCN}} = \frac{\frac{5}{14}S_{ABC}}{\frac{19}{63}S_{ABC}} = \frac{45}{38} = 1\frac{7}{38}.$

Ответ: $1\frac{7}{38}$.

Решение варианта 36

21. Выполним действия.

$\frac{9x-49y}{3\sqrt{x}-7\sqrt{y}} = \frac{(3\sqrt{x})^2-(7\sqrt{y})^2}{3\sqrt{x}-7\sqrt{y}} = \frac{(3\sqrt{x}+7\sqrt{y})(3\sqrt{x}-7\sqrt{y})}{3\sqrt{x}-7\sqrt{y}} = 3\sqrt{x}+7\sqrt{y}.$

$\frac{9y-49x}{3\sqrt{y}-7\sqrt{x}} = \frac{(3\sqrt{y})^2-(7\sqrt{x})^2}{3\sqrt{y}-7\sqrt{x}} = \frac{(3\sqrt{y}+7\sqrt{x})(3\sqrt{y}-7\sqrt{x})}{3\sqrt{y}-7\sqrt{x}} = 3\sqrt{y}+7\sqrt{x}.$

$3\sqrt{x}+7\sqrt{y}-(3\sqrt{y}+7\sqrt{x}) = -4\sqrt{x}+4\sqrt{y} = -4(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$

При $\sqrt{x}-\sqrt{y}=5$ получим $-4\cdot 5 = -20$.

Ответ: -20.

22. Обозначим расстояние между городами A и B через единицу, время в пути велосипедиста — x ч, мотоциклиста — $(x-4)$ ч.

1 ч 30 мин $= \frac{3}{2}$ ч. Скорость велосипедиста — $\frac{1}{x}$ км/ч, скорость мотоциклиста — $\frac{1}{x-4}$ км/ч.

Так как в момент встречи они суммарно проехали всё расстояние от A до B, имеем уравнение $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right)=1$.

$3(2x-4) = 2(x^2-4x)$, $2x^2-14x+12=0$, $x^2-7x+6=0$, $x_1=6$, $x_2=1$. x_2 не удовлетворяет условию задачи, поэтому велосипедист затратил на путь из B в A 6 часов.

Ответ: 6.

23. Построим график заданной функции.

Если $x+1\geqslant 0$, $x\geqslant -1$, то $y = x^2+x-5x-5+3$, $x\geqslant -1$.

Ветви параболы $y=x^2-4x-2$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна 2 и $2\geqslant -1$. Поэтому правая ветвь параболы $y=x^2-4x-2$ полностью принадлежит графику. От левой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $-1\leqslant x<2$. Заметим, что $y(-1)=3$ (см. рис. 112).

Если $x+1<0$, $x<-1$, то $y=x^2+x+5x+5+3$, $y=x^2+6x+8$, $x<-1$.

Ветви параболы $y=x^2+6x+8$ направлены вверх. Абсцисса вершины равна -3 и $-3<-1$. Поэтому левая ветвь этой параболы полностью принадлежит графику. От правой ветви этой параболы оставим только точки с абсциссами $1\leqslant x<-1$. Заметим, что $y(-1)=3$ и $y(-3)=-1$ (см. рис. 112).

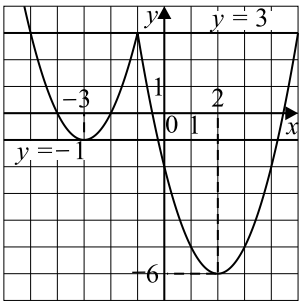


Рис. 112

Из рисунка определяем, что прямая $y = p$, параллельная оси абсцисс, имеет с графиком указанной функции ровно три общие точки при $p = -1$ и $p = 3$.

Ответ: $-1; 3$.

24. Согласно условию, получим рисунок (см. рис. 113).

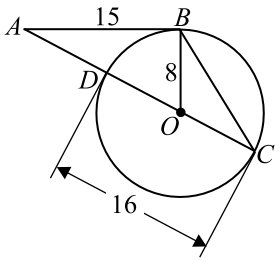


Рис. 113

1. Радиус, проведённый из центра окружности в точку касания перпендикулярен касательной. Поэтому треугольник AOB — прямоугольный с прямым углом B. Обозначим через R радиус окружности. Тогда по условию $R = 8$.

2. По теореме Пифагора для треугольника AOB получаем

$AO^2 = AB^2 + BO^2$, $(AD + DO)^2 = AB^2 + BO^2 = (AD + R)^2 = 15^2 + R^2$, $(AD + 8)^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2$. Отсюда $AD + 8 = 17$, $AD = 9$.

Ответ: 9.

25. Рассмотрим треугольники AM_1N и AN_1M (см. рис. 114), они имеют равные углы: $\angle M_1AN = \angle N_1AM$ — как вертикальные, $\angle AM_1N = \angle AN_1M = 90°$, следовательно, треугольники подобны. Из подобия следует пропорциональность сторон: $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{MN_1}{NM_1} = \dfrac{AN_1}{AM_1}$.

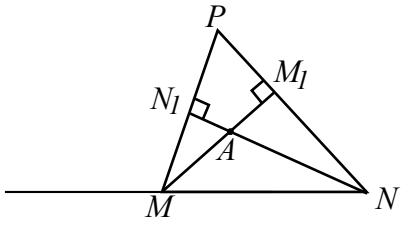


Рис. 114

Отсюда $AM \cdot AM_1 = AN \cdot AN_1$. Что и требовалось доказать.

26. Выразим площадь треугольника CAM и площадь четырёхугольника $MTBN$ (см. рис. 115) через площадь треугольника ABC.

Пусть h — высота треугольника ABC, опущенная из вершины A.

Тогда $S_{ACN} = \frac{1}{2}CN \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}CB\right) \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CB \cdot h\right) = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

$S_{CAM} = \frac{1}{2}CA \cdot AM \sin\angle CAM = \frac{1}{2}CA \cdot \left(\frac{7}{11}AN\right) \cdot \sin\angle CAM = \frac{7}{11}S_{CAN} = \frac{7}{22}S_{ABC}$.

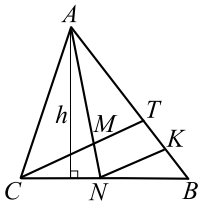


Рис. 115

Найдём площадь $MTBN$.

Проведём NK параллельно MT, точка K лежит на AB .

По теореме Фалеса $BK : KT = BN : NC$, но $BN = NC$ так как AN — медиана $\triangle ABC$. Отсюда $BK = KT$. С другой стороны, по теореме Фалеса $AM : MN = AT : TK$, отсюда $AT : TK = 7 : 4$. Пусть $TK = 4x$, тогда $AT = 7x$, $KB = TK = 4x$. Следовательно, $AT = \frac{7}{15}AB$.

Тогда $S_{AMT} = \frac{1}{2}AM \cdot AT \sin\angle MAT = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{11}AN\right) \cdot \left(\frac{7}{15}AB\right) \sin\angle MAT =$

$= \frac{49}{165}\left(\frac{1}{2}AN \cdot AB \sin\angle MAT\right) = \frac{49}{165}S_{NAB}$.

$S_{MTBN} = S_{NAB} - S_{AMT} = \frac{116}{165}S_{NAB} = \frac{58}{165}S_{ABC}$

Отсюда $\frac{S_{CAM}}{S_{MTBN}} = \frac{\frac{7}{22}S_{ABC}}{\frac{58}{165}S_{ABC}} = \frac{105}{116}$.

Ответ: $\frac{105}{116}$.

Решение варианта 38

21. Введём обозначение $x - 3 = t$. Тогда $x = t + 3$. Подставим это выражение в уравнение $f(x-3) = \frac{x^2+1}{x}$, получим $f(t) = \frac{(t+3)^2+1}{t+3}$.

Найдём $f(7) = \frac{(7+3)^2+1}{7+3} = \frac{10^2+1}{10} = 10{,}1$.

Ответ: 10,1.

22. Пусть x км — расстояние от A до C, y км/ч — скорость автомобиля, $\frac{x}{84}$ ч — время движения мотоциклиста до встречи в городе C, $\left(\frac{x}{84} + \frac{2}{5}\right)$ ч — время движения автомобилиста до встречи в городе C. Тогда $\left(\frac{x}{84} + \frac{2}{5}\right) \cdot y = x$.

После встречи автомобилист приехал в город B через $\dfrac{114-x}{y}$ ч, а за это время мотоциклист проехал половину расстояния между C и A и потратил $\dfrac{x}{2\cdot 84}$ ч. Составим второе уравнение: $\dfrac{x}{2\cdot 84}=\dfrac{114-x}{y}$. Решим систему $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{84}+\dfrac{2}{5}\right)\cdot y=x,\\ \dfrac{x}{2\cdot 84}=\dfrac{114-x}{y}.\end{cases}$

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе: $y=\dfrac{x}{\dfrac{x}{84}+\dfrac{2}{5}}$.

$$\frac{x}{2\cdot 84}=\frac{(114-x)\cdot\left(\dfrac{x}{84}+\dfrac{2}{5}\right)}{x};\ x^2=(114-x)\left(2x+\frac{4\cdot 84}{5}\right);$$

$$3x^2=228x-\frac{336x}{5}+\frac{114\cdot 4\cdot 84}{5};\ 3x^2-\frac{804x}{5}-\frac{114\cdot 4\cdot 84}{5}=0;$$

$15x^2-804x-456\cdot 84=0,\ x_1=84,\ x_2=-30{,}4.$

x_2 не удовлетворяет условию задачи. Расстояние от A до C равно 84 км.

Ответ: 84.

23. Построим график заданной функции.

Если $x\geqslant 0$, то $y=x(x-4)-2x$, $y=x^2-6x$.

Графиком функции $y=x^2-6x$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины равна 3 и $3>0$. Поэтому правая ветвь параболы с вершиной $(3;-9)$ полностью принадлежит графику. От левой части оставим только точки с абсциссами $0\leqslant x<3$. Заметим, что $y(0)=0$ (см. рис. 116).

Если $x<0$, то $y=-x(x-4)-2x$; $y=-x^2+2x$, $x<0$.

Графиком функции $y=-x^2+2x$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины равна 1 и $1>0$. Поэтому правая ветвь параболы с вершиной $(1;1)$ полностью не принадлежит графику. От левой ветви оставим только точки с абсциссами $x<0$. Заметим, что $y(0)=0$ (см. рис. 116).

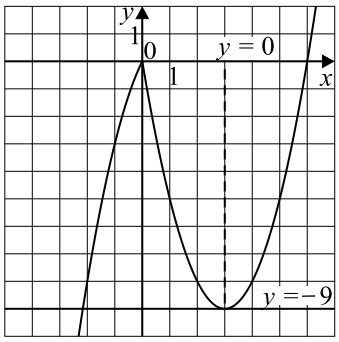


Рис. 116

Из рисунка определяем, что прямая $y=m$, параллельная оси абсцисс имеет с графиком функции две общие точки при $m=0$ и $m=-9$.

Ответ: -9; 0.

24. Согласно условию, получим рисунок (см. рис. 117). Расстояние от точки M до катета BC равно длине перпендикуляра MH, опущенного из точки M на катет BC.

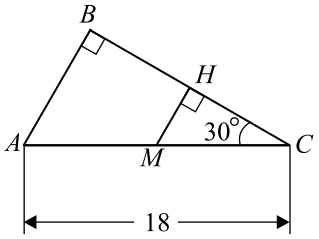


Рис. 117

1. Отрезки MH и AB перпендикулярны к BC, поэтому они параллельны. Так как MH проходит через середину AC, то MH является средней линией треугольника ABC, параллельной AB, поэтому $MH = \frac{1}{2}AB$.

2. По условию в прямоугольном треугольнике ABC катет AB лежит против угла в 30°, поэтому он равен половине гипотенузы AC, равной 18. Отсюда $MH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 = \frac{18}{4} = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

25. В треугольниках AME и CMF (см. рис. 118) $\angle AME = \angle CMF$ как вертикальные, $\angle EAM = \angle FCM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $AM = MC$ (диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам).

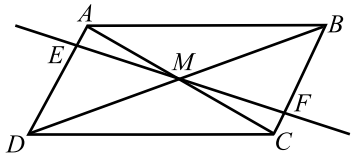


Рис. 118

Итак, $\triangle AEM = \triangle CFM$ (по двум углам и стороне между ними). Из равенства этих треугольников следует $AE = CF$.

26. Обозначим катеты прямоугольного треугольника через a и b, а гипотенузу c (см. рис. 119). Тогда его площадь равна $\frac{1}{2}ab$, отсюда $\frac{1}{2}ab = 50$, $a = \frac{100}{b}$.

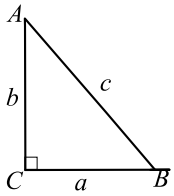


Рис. 119

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $200 = b^2 + \frac{10\,000}{b^2}$, $b^4 - 200b^2 + 10\,000 = 0$. Пусть $b^2 = t$, тогда $t^2 - 200t + 10\,000 = 0$, $(t - 100)^2 = 0$, $t = 100$. При $t = 100$ получим $b = \sqrt{100} = 10$ и $a = \frac{100}{10} = 10$.

Заметим, что катеты равны 10. Тогда $\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle A = 45°$. $\angle B = 90° - \angle A = 45°$.

Ответ: $45°, 45°$.

Решение варианта 39

21. Преобразуем уравнение $\dfrac{4x+5y-7}{4x-5y+7} = 10$.

Получим $4x + 5y - 7 = 10(4x - 5y + 7)$, $4x + 5y - 7 = 40x - 50y + 70$, $36x - 55y + 77 = 0$.

Найдём значение выражения $36x - 55y + 100 = 36x - 55y + 77 + 23 = 0 + 23 = 23$.

Ответ: 23.

22. Обозначим через x км/ч скорость третьего велосипедиста, а время его движения до встречи со вторым велосипедистом — через t ч. Второй велосипедист к этому моменту был в пути на 1 час дольше, поэтому выполняется равенство $x \cdot t = 9(t+1)$. Время движения до встречи третьего велосипедиста с первым равно $(t + 6{,}5)$ ч, а первый к этому моменту был в пути $(t + 8{,}5)$ ч. Составим второе уравнение: $x(t + 6{,}5) = 12(t + 8{,}5)$.

Решим систему $\begin{cases} x \cdot t = 9(t+1), \\ x(t+6{,}5) = 12(t+8{,}5). \end{cases}$

$\dfrac{t}{t+6{,}5} = \dfrac{3(t+1)}{4(t+8{,}5)}$, $4t(t + 8{,}5) = 3(t + 1)(t + 6{,}5)$,

$2t^2 + 23t - 39 = 0, t_1 = \dfrac{3}{2}, t_2 = -13$.

Так как t — это время, то $t = \dfrac{3}{2}$, подставляя найденное значение t в первое уравнение системы, найдём скорость третьего велосипедиста: $\dfrac{3}{2}x = 9\left(\dfrac{3}{2} + 1\right)$, $x = 15$ км/ч.

Ответ: 15.

23. Упростим выражение при $x \neq 1$.

$\dfrac{(x^2 - x)|x|}{x-1} = \dfrac{x(x-1)|x|}{x-1} = x|x|$.

$y = x|x|$ при $x \neq 1$, $y(1) = 1$.

Построим график заданной функции.

Если $x \geqslant 0$, то $y = x^2$. $x \neq 1$. Графиком является правая ветвь параболы $y = x^2$ с выколотой точкой $(1; 1)$ (см. рис. 120).

Если $x < 0$, то $y = -x^2$.

Графиком является левая ветвь параболы $y = -x^2$ (см. рис. 120).

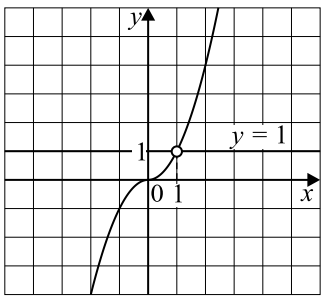


Рис. 120

По рисунку определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = m$, параллельной оси абсцисс, ни одной общей точки, если прямая проходит через точку $(1; 1)$, значит, $m = 1$.

Ответ: 1.

24. Согласно условию, получим рисунок (см. рис. 121). Центром окружности, вписанной в ромб является точка O пересечения его диагоналей. Радиусом r вписанной окружности является перпендикуляр OK, опущенный из точки O на сторону BC. Продолжая OK до пересечения с AD в точке L, получим высоту KL ромба $ABCD$. Значит, $r = \frac{1}{2}KL$.

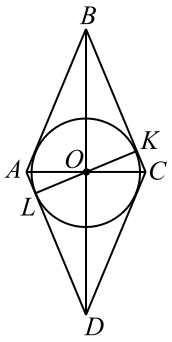


Рис. 121

1. Найдём площадь ромба по двум различным формулам:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = BC \cdot KL$.

Поэтому $\frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot KL$. Отсюда. $KL = \dfrac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{BC}$.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора получаем

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Значит, $KL = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24}{13} = \frac{120}{13}$ и $r = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{13} = \frac{60}{13}$.

Ответ: $\frac{60}{13}$.

25. Пусть $AN : MA = 5 : 9$. $\triangle MCA \sim \triangle NBA$ по двум углам ($\angle MAC = \angle NAB$ как вертикальные и $\angle MCA = \angle NBA = 90°$, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной).

Из подобия следует: $\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{MC}$.

BN — радиус окружности с центром N, MC — радиус окружности с центром M.

Диаметр окружности — это два радиуса, то есть $\frac{2BN}{2MC} = \frac{5}{9}$, что и требовалось доказать.

26. Обозначим точку пересечения прямых KM и LN буквой T, центр меньшей окружности — O_1, большей — O_2 (см. рис. 123). Пусть P — точка пересечения прямых KL и TO_2, Q — точка пересечения прямых MN и TO_2.

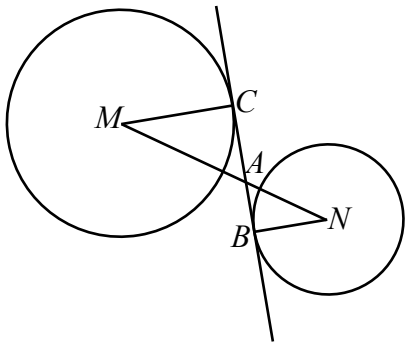


Рис. 122

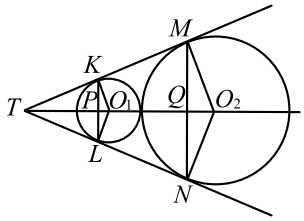


Рис. 123

Окружности вписаны в $\angle MTN$, поэтому TO_2 — биссектриса этого угла. Радиусы, проведённые в точку касания, перпендикулярны касательной, следовательно, $O_1K \perp KM$, $O_2M \perp KM$.

Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны, поэтому $KT = LT$, значит, треугольник KTL — равнобедренный и его биссектриса TP является высотой, то есть $TP \perp KL$. Аналогично из $\triangle NTM$ получим, что $TQ \perp MN$. Но тогда прямые KL и MN перпендикулярны одной прямой — прямой TO_2. Отсюда $KL \parallel MN$ и искомое расстояние равно PQ. В свою очередь, $PQ = O_1O_2 + PO_1 - QO_2$.

$O_1O_2 = 2 + 8 = 10$. Найдём PO_1 и QO_2.

Заметим, что $\triangle TKO_1 \sim \triangle TMO_2$ по двум углам ($\angle O_1TK$ — общий, $\angle TKO_1 = \angle TMO_2 = 90°$). Отсюда $\angle KO_1T = \angle MO_2T$ и $\dfrac{O_2T}{O_1T} = \dfrac{MO_2}{KO_1} = \dfrac{8}{2} = 4$.

$\dfrac{O_1T + 2 + 8}{O_1T} = 4$, $O_1T = \dfrac{10}{3}$.

Из $\triangle KO_1T$ получим, что $\cos\angle KO_1T = \dfrac{KO_1}{O_1T} = \dfrac{2}{\frac{10}{3}} = \dfrac{3}{5}$.

Так как треугольник KPO_1 прямоугольный, то $PO_1 = O_1K\cos\angle KO_1T = 2 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{5}$.

Аналогично, $QO_2 = O_2M\cos\angle MO_2T = 8 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{5}$.

Значит, $PQ = 10 + \dfrac{6}{5} - \dfrac{24}{5} = 6{,}4$.

Ответ: 6,4.

Решение варианта 40

21. Преобразуем уравнение $\dfrac{6x + 2y - 9}{6x - 2y + 9} = 5$.

Получим $6x+2y-9=5(6x-2y+9),\ 6x+2y-9=30x-10y+45,$
$24x-12y+54=0,\ 12x-6y+27=0$. Тогда $12x-6y=-27$.

Найдём значение выражения $36x-18y+5=3(12x-6y)+5=3\cdot(-27)+5=-76$.

Ответ: -76.

22. Обозначим через x км/ч скорость третьего велосипедиста, а время его движения до встречи со вторым велосипедистом — через t ч. Второй велосипедист к этому моменту был в пути на 1 час дольше, поэтому выполняется равенство $x\cdot t=8(t+1)$. Время движения до встречи третьего велосипедиста с первым равно $\left(t+2\frac{1}{3}\right)$ ч, а первый к этому моменту был в пути $\left(t+4\frac{1}{3}\right)$ ч. Составим второе уравнение: $x\left(t+2\frac{1}{3}\right)=10\left(t+4\frac{1}{3}\right)$.

Решим систему $\begin{cases} x\cdot t=8(t+1), \\ x\left(t+2\frac{1}{3}\right)=10\left(t+4\frac{1}{3}\right). \end{cases}$

$$\frac{t}{t+\frac{7}{3}}=\frac{4(t+1)}{5\left(t+\frac{13}{3}\right)},\ 5t\left(t+\frac{13}{3}\right)=4(t+1)\left(t+\frac{7}{3}\right),\ 3t^2+25t-28=0,$$

$t_1=-\frac{28}{3},\ t_2=1$. Так как t — это время, то $t=1$, подставляя найденное значение t в первое уравнение системы, найдём скорость третьего велосипедиста: $x=8(1+1)$, $x=16$ км/ч.

Ответ: 16.

23. Упростим выражение при $x\neq -2$.

$$\frac{(3x^2+6x)|x|}{x+2}=\frac{3x(x+2)|x|}{x+2}=3x|x|.$$

$y=3x|x|$ при $x\neq -2$, $y(-2)=-12$.

Построим график заданной функции.

Если $x\geqslant 0$, то $y=3x^2$. Графиком является правая ветвь параболы $y=3x^2$ (см. рис. 124).

Если $x<0$, то $y=-3x^2$, $x\neq -2$. Графиком является левая ветвь параболы $y=-3x^2$ с выколотой точкой $(-2;-12)$ (см. рис. 124).

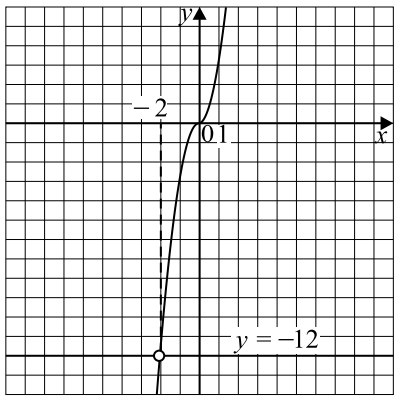


Рис. 124

По рисунку определяем, что график данной функции не имеет с прямой $y = b$, параллельной оси абсцисс, ни одной общей точки, если прямая проходит через точку $(-2; -12)$, значит, $b = -12$.

Ответ: -12.

24. Согласно условию, получим рисунок (см. рис. 125). Центром окружности, вписанной в ромб является точка O пересечения его диагоналей. Радиусом r вписанной окружности является перпендикуляр OK, опущенный из точки O на сторону BC. Продолжая OK до пересечения с AD в точке L, получим высоту KL ромба $ABCD$. Значит $KL = 2r = 2\sqrt{8}$.

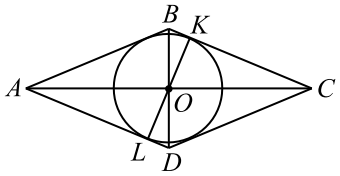


Рис. 125

1. Найдём площадь ромба по двум различным формулам:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = BC \cdot KL$.

Поэтому $\frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot KL$, $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot BD = 2\sqrt{8} \cdot BC$, $2\sqrt{10} \cdot BD = 2\sqrt{8} \cdot BC$, $10BD^2 = 8BC^2$.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора получаем:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2 = \frac{1}{4}BD^2 + 40$, $BC^2 = \frac{1}{4}BD^2 + 40$.

Тогда

$10BD^2 = 8\left(\frac{1}{4}BD^2 + 40\right)$; $10BD^2 = 2BD^2 + 320$, $8BD^2 = 320$, $BD^2 = 40$, $BD = 2\sqrt{10}$.

Ответ: $2\sqrt{10}$.

25. Отрезок MN разделил трапецию на две части (см. рис. 126), то есть трапецию $ABMN$ с основаниями BM и AN и трапецию $MCDN$ с основаниями MC и ND. $S_{ABMN} = \frac{1}{2}(BM + AN) \cdot BK$, где BK — высота всей трапеции и её части $ABMN$.

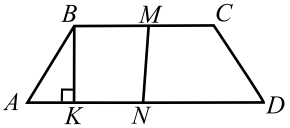


Рис. 126

$BM = \frac{1}{2}BC$, $AN = \frac{1}{2}AD$. Тогда $S_{ABMN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD\right) \cdot BK =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

$2S_{ABMN} = S_{ABCD}$.

26. Обозначим точку пересечения прямых KM и LN буквой T, центр меньшей окружности — O_1, большей — O_2 (см. рис. 127). Пусть P — точка пересечения прямых KL и TO_2, Q — точка пересечения прямых MN и TO_2.

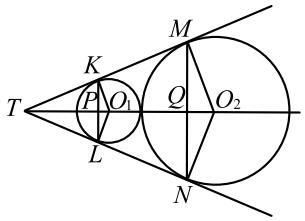


Рис. 127

Окружности вписаны в $\angle MTN$, поэтому TO_2 — биссектриса этого угла. Радиусы, проведённые в точку касания, перпендикулярны касательной, следовательно, $O_1K \perp KM$, $O_2M \perp KM$.

Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны, поэтому $KT = LT$, значит, треугольник KTL — равнобедренный и его биссектриса TP является высотой, то есть $TP \perp KL$. Аналогично из $\triangle NTM$ получим, что $TQ \perp MN$. Но тогда прямые KL и MN перпендикулярны одной прямой — прямой TO_2. Отсюда $KL \parallel MN$ и искомое расстояние равно PQ. В свою очередь, $PQ = O_1O_2 + PO_1 - QO_2$.

$O_1O_2 = 9 + 18 = 27$. Найдём PO_1 и QO_2.

Заметим, что $\triangle TKO_1 \sim \triangle TMO_2$ по двум углам ($\angle O_1TK$ — общий, $\angle TKO_1 = \angle TMO_2 = 90°$). Отсюда $\angle KO_1T = \angle MO_2T$ и $\dfrac{O_2T}{O_1T} = \dfrac{MO_2}{KO_1} = \dfrac{18}{9} = 2$.

$\dfrac{O_1T + 9 + 18}{O_1T} = 2$, $O_1T = 27$.

Из $\triangle KO_1T$ получим, что $\cos\angle KO_1T = \dfrac{KO_1}{O_1T} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$.

Так как треугольник KPO_1 прямоугольный, то $PO_1 = O_1K\cos\angle KO_1T = 9 \cdot \dfrac{1}{3} = 3$.

Аналогично, $QO_2 = O_2M\cos\angle MO_2T = 18 \cdot \dfrac{1}{3} = 6$.

Значит, $PQ = 27 + 3 - 6 = 24$.

Ответ: 24.