Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. — 10-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 399 с. : ил.

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, легко убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$\text{т. е.} \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

...

Пример 8. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} x$, получим:

$$z^2 - 3z + 2 = 0;$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2.$$

Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ находим:

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ находим: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

(С. 109-111)

Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый уровень / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.]. — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2012. — 464 с. : ил. — ISBN 978-5-09-026651-2.
A45

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72 + 22.161я72

ISBN 978-5-09-026651-2

Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Задача 7 Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

"Математика в школе" , научно-методический журнал, 2000, № 10 :

ОСВОБОДИМСЯ ОТ ЛИШНЕЙ РАБОТЫ

Р.Г.ГИЛЕМХАНОВ (Москва)

Решение тригонометрического уравнения вида

$$m\sin^2 x + n\sin x\cos x + p\cos^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $m \neq 0,\ n \neq 0,\ p \neq 0,$

начинается делением обеих частей на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$). При этом учителя требуют от учащихся непременной проверки того, что значения x, при которых $\cos x = 0$ (или $\sin x = 0$) не являются решениями уравнения (1).

На наш взгляд, можно было бы освободиться раз и навсегда от этой совершенно ненужной работы.

Докажем в общем виде один единственный раз, что при делении обеих частей уравнения (1) на $\cos^2 x$ ($\sin^2 x$) никакой потери корней уравнения не может быть. Это можно сделать так:

Если $\cos^2 x = 0$, то $\cos x = 0$, $\sin^2 x = 1$. Тогда $m\sin^2 x + n\sin x\cos x + p\cos^2 x = m + 0 + 0 = m$, т.е. $m = 0$, что противоречит условию $m \neq 0$.

Аналогично, если $\sin^2 x = 0$, то $\sin x = 0$, $\cos^2 x = 1$, $m\sin^2 x + n\sin x\cos x + p\cos^2 x = p$, $p = 0$, что также противоречит условию $p \neq 0$.

От подобной проверки можно избавить учащихся и в некоторых других случаях. Например,

при $m = 0,\ n \neq 0,\ p \neq 0,$

при $m \neq 0,\ p \neq 0,\ n = 0,$

при $m = 0,\ n \neq 0,\ p = 0.$