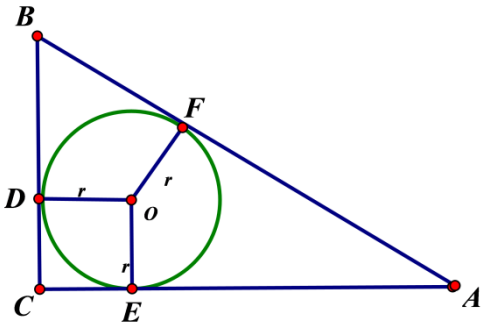
25. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен половине разности суммы катетов и гипотенузы.

Докажем, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Доказательство.



Пусть $AC = b, BC = a, AB = c, OE = OD = OF = r$.

Найдем площадь треугольника ABC.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{ab}{2}$.

$S_{ABC} = pr = \frac{(a+b+c)}{2} r$;

$\frac{ab}{2} = \frac{(a+b+c)}{2} r$;

$r = \frac{ab}{a+b+c}$.

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{a^2+2ab+b^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab+c^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2} \blacksquare$$