ОММО 2018 **Вар 1**

****

****

**Решения:**

**1.**

Логарифмируем по основанию 2015 и делим на 2016:

> .

**2.**

Определим какое число n грибников, собравших 200 грибов, не могли не принести одинаковое количество грибов .

Рассмотрим случай , когда один не принес ни одного гриба, 2-й – 1 гриб, … , (n-1)-й – n-2, n-й принес остальные грибы до 200. Тогда

и надо, чтобы . Иначе два грибника принесут одинаковое число грибов. Решаем неравенство

 .

Максимальное n=20.

Теперь, если число грибников n будет равно 21, то они минимально могут собрать, чтобы ни у кого не было одинаковое число грибов ,

Таким образом при n=21 обязательно у кого-то будет одинаковое число грибов, а при n=20 , как показывает случай рассмотренный выше, число грибов может быть разное.

Значит ответ : число грибников по условию задачи 21.

**3.**

При n=1 должно делиться на 15, т.е. 7+ 7a=15t или а должно иметь вид

a=15t/7-1=15s-1, где . При этом остаток при делении а на 15 равен 14.

Докажем по индукции, что и при других n остаток будет 14.

При n=1 выполняется. Предполагаем, что при n выполняется. При n+1

*.*

В первой квадратной скобке выражение делится на 15 с остатком 14 по предположению, а выражение во второй без остатка. Доказали.

Ответ: 14.

**4.**

****

**5.**

****

**6.**

Постоим на координатной плоскости Оху множество решений неравенства

 .

Для этого построим множество нулей функции .

Заметим, что каждый сомножитель функции периодический по х с периодом ,а сама функция по х периодическая с периодом и нечетная по х , т.е. .

Рассмотрим каждый сомножитель на .

1. – функция нечетная.

При функция возрастает, и .

При функция убывает, и.

Ее график:



1. – отражение 1. относительно оси х.



1. – сдвиг 1. влево по оси х на .



1. – отражение 3. относительно оси х.
2. – отражение 1. вправо по оси х на .



1. – отражение 5. относительно х.



Объединяя 1-6 получим множество точек функции в виде квадратов, представленных на рисунке, при .



Внутри каждого квадрата знак функции имеет постоянное значение. Для его определения легче всего вычислить значение функции в какой –либо точке внутри квадрата (лучше в центре). Можно воспользоваться свойством, что при переходе через границу квадратов, функция изменяет знак на противоположный.

На рисунке области, закрашенные голубым , соответствуют множеству точек, удовлетворяющих исходному неравенству. Используя свойство периодичности, можно распространить множество на всю ось х.

**7.**

****

**8.**

*.*  (1)

Сделаем замену .

Получим уравнение

 (2)

 при .

Если корень этого уравнения , то уравнение (1) будет иметь два корня .

Поэтому необходимым условием будет . Отсюда необходимым (но недостаточным) условием для а из (2)

 или .

При а=1 корень уравнения (2) единственен в силу монотонности функции при и равен 0.

При а=3 корень уравнения (2) при имеет два корня, один из которых 0, а другой Это следует из того, что при функция имеет отрицательное значение -1, а при t=2 положительное 2.

****

**9.**

Рассмотрим произвольное число N в десятичной записи. Цифры, из которого состоит это число, разобьем на две группы. В первую отнесем цифры больше 4 и их число будем обозначать х. Во вторую группу отнесем цифры меньше 5. Сумму цифр в числе N обозначим через S(N). Посмотрим, как изменится сумма цифр у числа 2N, которое обозначим через S(2N). Т.е. попытаемся выразить S(2N) через S(N).

S(2N) будет состоять 1)из удвоенной суммы всех цифр из группы 2 числа N , 2) числа х , связанного с цифрами из 1-ой группы, которые увеличивают на 1 следующий разряд и 3) из удвоенной суммы всех цифр из 1-группы за вычетом 10х, связанной с изменением цифры в самом разряде. Итак,

 S(2N)=2S(N)+x-10x=2S(N)-9x. (1)

Эта формула будет справедлива и при делении N на 2. При этом N должно быть четным, т.е заканчиваться на цифру из 1-й группы, и число x’ цифр больше 4 для N/2 может не совпадать с числом x цифр больше 4 для N или

 S(N)=2S(N/2)-9x’. (2)

Однако, у нас не произвольное N, а состоящее из нечетных цифр 1-й группы (5,7,9) и четных цифр 2-й группы (0,2,4). При этом x=x’. Докажем это.

Для этого разобьем число N в десятичной записи на числа, сохраняя порядок цифр, такого типа ‘aa…ab’ или ‘bb…b’, где а из 1-й группы, а b из 2-ой . Тогда при делении на 2 число цифр из 1-й группы сохраняется. ‘aa…ab` переходит в ‘baa…a`, а тип ‘bb…b` сохраняется.

Подставляя в (1) и (2) в значения S(2N)=35 , S(N/2)=29, получим систему для определения S(N):

35=2S(N)-9x, S(N)=2\*29-9x.

Откуда S(N)=31, x=3.

**10.**

****