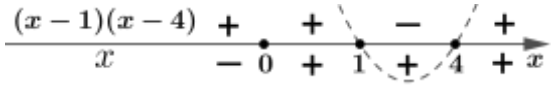
18. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее системе уравнений:

$$\begin{cases} \left|x^2-5x+4\right|-9x^2-5x+4+10x|x|=0 \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0 \end{cases}$$

Решение.

Решим (1) уравнение системы. Нули подмодульных выражений:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-5x+4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=4. \end{array}\right.$$ (по теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_1x_2=5. \end{cases} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=4;\ x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.)



Раскроем модули и решим уравнение на каждом промежутке:

1) $x\le 0$. $x^2-5x+4-9x^2-5x+4-10x^2=0 \Leftrightarrow -18x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow 9x^2+5x-4=0$,

$x_{1;2}=\dfrac{-5\pm 13}{18}=\left\{-1;\ 4/9\right\}$, $x=-1$.

2) $x\in(0;1)\cup(4;+\infty)$. $x^2-5x+4-9x^2-5x+4+10x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$,

$x_1=1,\ x_2=4$. На этих промежутках решений нет.

3) $1\le x\le 4$. $-x^2+5x-4-9x^2-5x+4+10x^2=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow$ корнем уравнения является $\forall x\in[1;4]$.

Объединяя результаты, получим решение (1) уравнения системы: $\{-1\}\cup[1;4]$. Чтобы исходная система имела хотя бы одно решение, нужно найти такие значения параметра a, при каждом из которых (2) уравнение системы имеет хотя бы одно решение на множестве $X=\{-1\}\cup[1;4]$.

$x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0$, уравнение квадратное; $D_1=(a-1)^2-a(a-2)=a^2-2a+1-a^2+2a=1>0 \Rightarrow$ при $\forall a$ уравнение имеет два различных корня: $x_1=a-1-1=a-2$; $x_2=a-1+1=a$. Условие задачи выполняется, если:

$$\left[\begin{array}{l} a-2=-1, \\ a=-1, \\ 1\le a-2\le 4, \\ 1\le a\le 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-1, \\ 3\le a\le 6, \\ 1\le a\le 4; \end{array}\right.$$

$a\in\{-1\}\cup[1;6]$.

Ответ: $a\in\{-1\}\cup[1;6]$.