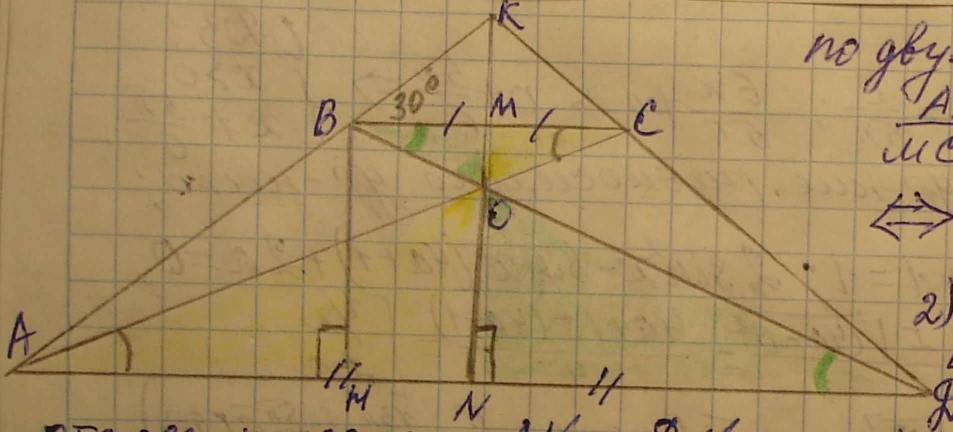
16. Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а прямые AB и CD – в точке K. Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно, и угол BAD равен 30^0. Известно, что в трапеции ABMN и NMCD можно вписать окружность.

А) Докажите, что треугольник AKD тупоугольный.

Б) Найти отношение площадей треугольника BKC и трапеции ABCD



Решение. вар. 232

А) Рассмотрим две пары подобных тр-в:

1) AON ~ COM и DON ~ BOM по двум (отмечен.) углам. Получим,

$\frac{AN}{MC}=\frac{ON}{MO}$ и $\frac{DN}{BM}=\frac{ON}{MO} \Rightarrow \frac{AN}{MC}=\frac{DN}{BM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{AN}{DN}=\frac{MC}{BM}$ (1)

2) AKN ~ BKM и DKN ~ CKM

∠K-общ. ∠A=∠B ⇓ $\frac{AN}{BM}=\frac{KN}{KM}$ и ∠K-общ ∠D=∠C ⇓ $\frac{DN}{MC}=\frac{KN}{KM}$,

Отсюда имеем $\frac{AN}{BM}=\frac{DN}{MC} \Leftrightarrow \frac{AN}{DN}=\frac{BM}{MC}$ (2). Из (1) и (2) $\Rightarrow \boxed{\frac{MC}{BM}=\frac{BM}{MC}}$, т.е. равны два взаимно обратных положит. числа. След., каждое из них равно единице, т.е. $\frac{BM}{MC}=1 \Rightarrow BM=MC$. Из (1) (и (2)) ⇒, что $\frac{AN}{DN}=1$, т.е. AN=DN. Т.е., прямая KO делит основания трапеции пополам.

Т.к. в 4-хугольники ABMN и NMCD можно вписать окр-ти, то BM+AN=AB+MN и MC+ND=CD+MN. Вычтем полученные ра-ва. Учитывая доказанное (M и N – середины оснований), получим AB−CD=0, т.е. AB=CD. След., трапеция (данная) равнобедр. След. ∠A=∠B, и т.к. ∠A=30°, то ∠K (тр-ка AKD) = $180^0-2\cdot30^0=120^0$, т.е. тупой, что

2018 . 4 11

Б) Т.к. $\angle A=\angle B$, то ΔAKD равнобедр. и, след., медиана KN явл. одновременно и высотой (и бис.)

Т.к. $AD \parallel BC$, а окр-ти их касаются, то радиусы этих окр. одинаковы.

Пусть r - радиус окр-тей, тогда $BH=2r$ - высота трапеции; $MN=BH=2r$;

$AB=\frac{BH}{\sin A}=\frac{2r}{\sin 30^\circ}=4r$ (ΔABH, $\angle H=90^\circ$, $BH=2r$), $AH=AB\cos A=4r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2r\sqrt{3}$.

Т.к. $HN=BM$, то из св-ва описанного 4-х-ка имеем $AH+2BM=AB+MN \Rightarrow$

$2BM=AB+MN-AH$; $2BM=4r+2r-2r\sqrt{3}$; $BM=3r-r\sqrt{3}=r(3-\sqrt{3})\left(=\frac{1}{2}BC\right)$.

$AN=AH+HN=2r\sqrt{3}+3r-r\sqrt{3}=r\sqrt{3}+3r\left(=\frac{1}{2}AD\right)$

$S_{трапец.}=(AN+BM)\cdot MN=(r\sqrt{3}+3r+3r-r\sqrt{3})\cdot 2r=12r^2$.

ΔBKC: высота $KM=BM\,\mathrm{tg}\angle B=r(3-\sqrt{3})/\sqrt{3}$. $S_{BKC}=\frac{1}{2}BC\cdot KM=\frac{r^2(3-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\frac{r^2(12-6\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$;

$S_{BKC}=\frac{6r^2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=\frac{6r^2(2\sqrt{3}-3)}{3}=2r^2(2\sqrt{3}-3)$.

$\frac{S_{BKC}}{S_{ABCD}}=\frac{2r^2(2\sqrt{3}-3)}{12r^2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

2018 4 11