18. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0 \\ ax-y-4a-2=0 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

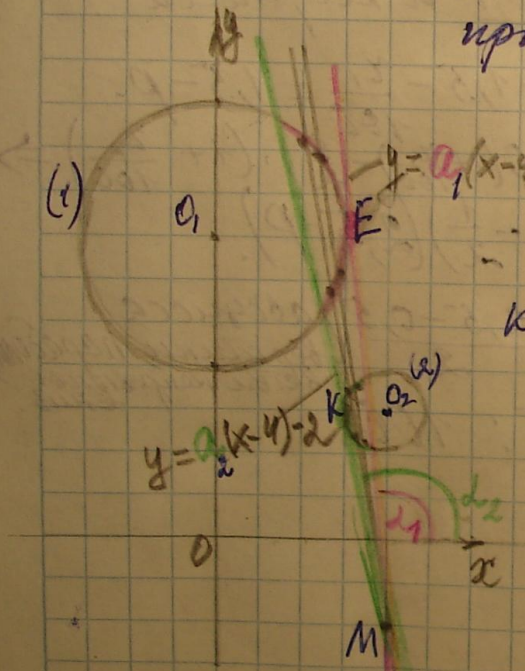
Решение.

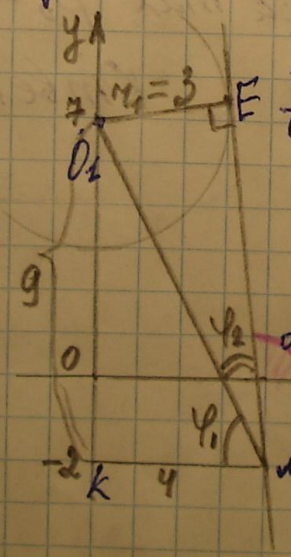
1-е ур-ние системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+(y-7)^2=9, \text{ окр. } r_1=3, (0;7)\text{-центр} \\ (x-4)^2+(y-3)^2=1, \text{ окр. } r_2=1, (4;3)\text{-центр} \end{array}\right.$$

2-е ур. $y=a(x-4)-2$, пучок прямых проходящих через т. $(4;-2)$, угл. коэф. $k=\operatorname{tg}\alpha=a$.

Т.к. окр-ти не пересекаются, то 4 решения (4 т-ки пересечения прямых пучка с окр-тями) система будет иметь для тех a, которые удовл. нер-ву $a_1<a<a_2$, a_1, a_2 — угловые коэф. касательных к окр-м (1) и (2). a_1, a_2 — ?





1) $a_1=\operatorname{tg}\alpha_1$; $\alpha_1=180^\circ-(\varphi_1+\varphi_2)$.

$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{O_1K}{KM}=\frac{9}{4}$; $\sin\varphi_2=\frac{r_1}{O_1M}=\frac{3}{\sqrt{9^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{97}}$

$\cos\varphi_2=\sqrt{1-\frac{9}{97}}=\sqrt{\frac{88}{97}}=\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{97}}$; $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{3}{2\sqrt{22}}$

$a_1=\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}(180^\circ-(\varphi_1+\varphi_2))=-\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)$.

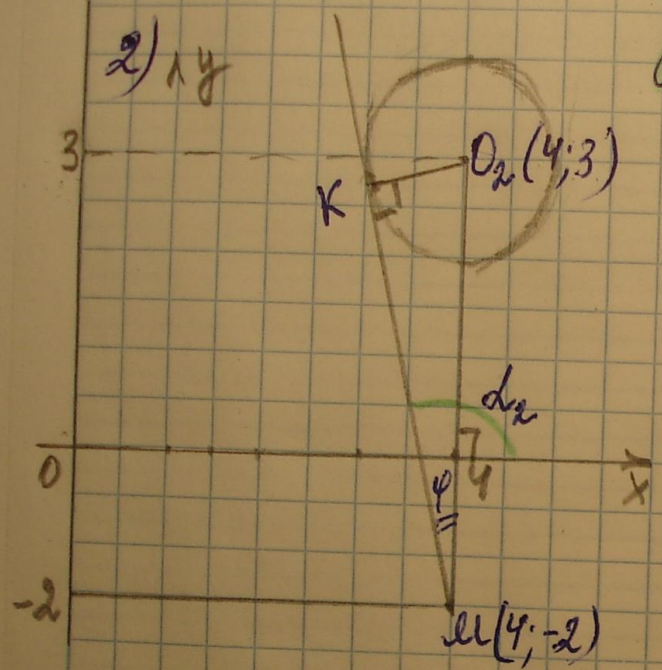
$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{9/4+3/2\sqrt{22}}{1-\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2\sqrt{22}}}=$

$=-\frac{(9\sqrt{22}+6)\cdot 2}{8\sqrt{22}-27}=\frac{3(3\sqrt{22}+2)(8\sqrt{22}+27)\cdot 2}{64\cdot 22-27^2}=\frac{6(582+97\sqrt{22})}{1408-729}$;

2016 4 11

$$tg(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{6\cdot 97(6+\sqrt{22})}{97\cdot 7}=\frac{6(6+\sqrt{22})}{7};\quad a_1=-tg(\varphi_1+\varphi_2)=-\frac{6(6+\sqrt{22})}{7}.$$

2)



$$a_2=tg\alpha_2;\quad \alpha_2=90^\circ+\varphi;\quad tg\alpha_2=tg(90^\circ+\varphi)=-ctg\varphi.$$

$$\sin\varphi=\frac{KO_2}{O_2M}=\frac{1}{5};\quad \cos\varphi=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5};$$

$$O_2M=3+2=5;\quad KO_2=r_2=1$$

$$ctg\,\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{2\sqrt{6}}{1}=2\sqrt{6};$$

$$a_2=tg\alpha=-ctg\,\varphi=-2\sqrt{6}.$$

Ответ: $a\in\left(-\frac{6(6+\sqrt{22})}{7};-2\sqrt{6}\right).$

2018 4 11