13. А) Решите уравнение $\sin x+\cos\left(5x-\frac{9\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin(3x+\pi)$

Б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$

Решение.

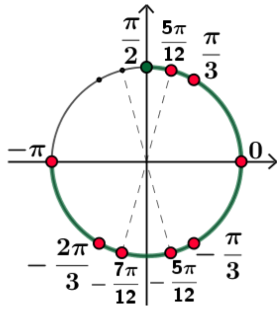
(а) Применим формулы приведения: $\cos\left(5x-\frac{9\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\sin 5x,\ \sin(3x+\pi)=-\sin 3x.$

Уравнение примет вид:

$$\sin x+\sin 5x=-\sqrt{3}\sin 3x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x+\sqrt{3}\sin 3x=0 \Leftrightarrow \sin 3x\left(2\cos 2x+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ 2\cos 2x+\sqrt{3}=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ \cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z},\\ 2x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi n}{3},\ \ n\in\mathbb{Z},\\ x=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

(б) Отбор корней $\in\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ проведём на тригонометрической окружности:



$$x_1=-\pi;\ \ x_2=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3};\ \ x_3=-\pi+\frac{5\pi}{12}=-\frac{7\pi}{12};$$

$$x_4=-\frac{5\pi}{12};\ \ x_5=-\frac{\pi}{3};\ \ x_6=0;\ \ x_7=\frac{\pi}{3};\ \ x_8=\frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: (а) $\frac{\pi n}{3},\ \ n\in\mathbb{Z};\pm\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$

(б) $-\pi;\ -\frac{2\pi}{3};\ -\frac{7\pi}{12};\ -\frac{5\pi}{12};\ -\frac{\pi}{3};0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{12}.$