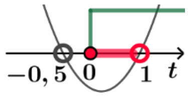
15. Решите неравенство: $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2)$

Решение.

Пусть $t=\sqrt{log_9(3x^2-4x+2)}=\sqrt{log_{3^2}(3x^2-4x+2)}=\sqrt{\frac{\sqrt{log_3(3x^2-4x+2}}{2}}$, $t\geq 0$, тогда $\sqrt{log_3(3x^2-4x+2}=2t^2$. Неравенство примет вид: $t+1>2t^2 \ \Leftrightarrow\ 2t^2-t-1<0$;

$y=2t^2-t-1$, графиком является парабола, ветви направлены вверх;



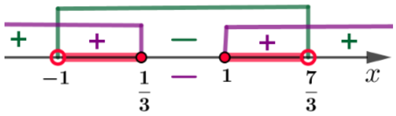
$t_{1;2}=\frac{1\pm 3}{4}=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$; $\ 0\leq t<1$.

Вернёмся к переменной х: $0\leq\sqrt{log_9(3x^2-4x+2)}<1 \ \Leftrightarrow\ 0\leq log_9(3x^2-4x+2)<1 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ log_9 1\leq log_9(3x^2-4x+2)<log_9 9 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3x^2-4x+2\geq 1,\\3x^2-4x+2<9;\end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3x^2-4x+1\geq 0,\\3x^2-4x-7<0;\end{cases} \ \Leftrightarrow$

$y=log_9 x$ – возрастающая функция $\qquad x_{1;2}=\frac{2\pm 1}{3}=\left\{\frac{1}{3};1\right\}$; $\ x_{1;2}=\frac{2\pm 5}{3}=\left\{-1;\frac{7}{3}\right\}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)\geq 0,\\3(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)<0;\end{cases}$



$x\in\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup\left[1;\frac{7}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup\left[1;\frac{7}{3}\right)$.