18. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0\\ ax-y-4a-2=0\end{cases}$$

имеет четыре решения?

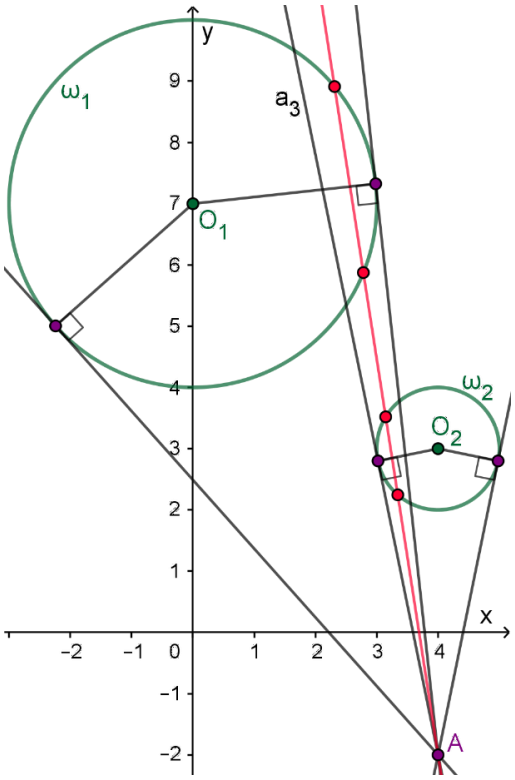
Решение.

Построим графики уравнений системы в координатной плоскости xOy.

(1) Первое уравнение системы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+(y-7)^2-9=0,\\(x-4)^2+(y-3)^2-1=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+(y-7)^2=3^2,\\(x-4)^2+(y-3)^2=1^2.\end{array}\right.$$

Графиком (1) уравнения системы является объединение двух окружностей:
ω_1 с центром в точке $O_1(0;7)$ радиусом $R_1=3$ и ω_2 с центром в точке $O_2(4;3)$ радиусом $R_2=1$.
Так как $\rho(O_1;O_2)=\sqrt{4^2+(3-7)^2}=4\sqrt{2}>3+1=4$, т.е. $\rho(O_1;O_2)>R_1+R_2$, то окружности не пересекаются.



(2) $ax-y-4a-2=0 \Leftrightarrow y=a(x-4)-2$.
Второе уравнение системы задаёт множество прямых l, проходящих через точку $A(4;-2)$, с угловым коэффициентом, равным a.

Для каждого конкретного значения параметра a_0 количество точек пересечения параметрической прямой с окружностями ω_1 и ω_2 равно количеству решений исходной системы.
Поскольку окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются, а прямая может иметь с каждой из них не более двух точек, то 4 точки пересечения возможны только тогда, когда параметрическая прямая пересекает каждую из окружностей ровно в 2 точках.
Расстояние от центра окружности ω_1 до прямой l равно:

$$\rho(O_1;a)=\frac{|a\cdot 0-7-4a-2|}{\sqrt{a^2+1^2}}=\frac{|4a+9|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Расстояние от центра окружности ω_2 до прямой l равно:

$$\rho(O_1;a)=\frac{|4a-3-4a-2|}{\sqrt{a^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Прямая пересекает окружность в двух точках только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности $\Rightarrow$ должны выполняться следующие требования:

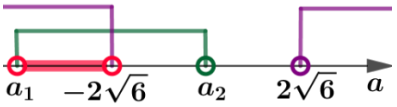
$$\begin{cases}\rho(O_1;l)<3,\\ \rho(O_2;l)<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{|4a+9|}{\sqrt{a^2+1}}<3,\\ \dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|4a+9|<3\sqrt{a^2+1},\\ \sqrt{a^2+1}>5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16a^2+72a+81<9a^2+9,\\ a^2+1>25;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7a^2+72a+72<0,\\ a^2>24;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7(a-a_1)(a-a_2)<0,\\ |a|>2\sqrt{6};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1<a<a_2,\\ \left[\begin{array}{l}a<-2\sqrt{6},\\ a>2\sqrt{6};\end{array}\right.\end{cases}$$

$$a_{1;2}=\frac{-36\pm\sqrt{(4\cdot 9)^2-7\cdot 72}}{7}=\frac{-36\pm 6\sqrt{4\cdot 9-7\cdot 2}}{7}=\frac{-36\pm 6\sqrt{22}}{7},\ a_1=\frac{-36-6\sqrt{22}}{7}, a_2=\frac{-36+6\sqrt{22}}{7}.$$

$4<\sqrt{22}$, тогда $\dfrac{-36+6\sqrt{22}}{7}>\dfrac{-36+6\cdot 4}{7}=-\dfrac{12}{7}>-4>-2\sqrt{6}$, т. к. $\sqrt{6}>2 \Leftrightarrow -2\sqrt{6}<-4$;

$\dfrac{36+6\sqrt{22}}{7}>\dfrac{36+6\cdot 4}{7}=\dfrac{60}{7}>6>2\sqrt{6}$, т. к. $\sqrt{6}<3 \Leftrightarrow 2\sqrt{6}<6 \Rightarrow \dfrac{-36-6\sqrt{22}}{7}<-2\sqrt{6}$.



$a\in\left(\frac{-36-6\sqrt{22}}{7};\ -2\sqrt{6}\right)$.

Ответ: $a\in\left(\frac{-36-6\sqrt{22}}{7};\ -2\sqrt{6}\right)$.