Решение задания 13. Тренировочный вариант 232 Александра Ларина.

13. А) Решите уравнение $\sin x + \cos\left(5x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi)$

Б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

Решение:

а) $\sin x + \cos\left(5x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x+\pi) \Leftrightarrow \sin x + \cos\left(\frac{9\pi}{2} - 5x\right) = -\sqrt{3}\sin 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x + \sin 5x + \sqrt{3}\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x + \sqrt{3}\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x\left(2\cos 2x + \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ 2\cos 2x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{3} \\ 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{3} \\ x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n \end{array}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни данного уравнения с помощью двойных неравенств:

1) $-\pi \le \frac{\pi k}{3} \le \frac{\pi}{2}$, $-1 \le \frac{1}{3}k \le \frac{1}{2}$, $-3 \le k \le \frac{3}{2}$. Т.к. $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -3, -2, -1, 0, 1$ и $x = -\pi, x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}, x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

2) $-\pi \le \frac{5\pi}{12} + \pi n \le \frac{\pi}{2}$, $-1 \le \frac{5}{12} + n \le \frac{1}{2}$, $-\frac{17}{12} \le n \le \frac{1}{12}$. Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -1; 0$ и $x = -\frac{7\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$

3) $-\pi \le -\frac{5\pi}{12} + \pi n \le \frac{\pi}{2}$, $-1 \le -\frac{5}{12} + n \le \frac{1}{2}$, $-\frac{7}{12} \le n \le \frac{11}{12}$. Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 0$ и $x = -\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

б) $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$.