Решение задания 15. Тренировочный вариант 232 Александра Ларина.

15. Решите неравенство: $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2)$

Решение:

$$3x^2-4x+2=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0 \text{ при } \forall x\in\mathbb{R}.$$

- Обозначим $t=\log_9\left(3x^2-4x+2\right)$, тогда $\log_3\left(3x^2-4x+2\right)=2t$ и неравенство примет вид:

$$\sqrt{t}+1>2t\Leftrightarrow\sqrt{t}>2t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2t-1\ge 0\\ t>(2t-1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}2t-1<0\\ t\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ 4t^2-4t+1-t<0\end{cases}\\ 0\le t<\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ 4t^2-5t+1<0\end{cases}\\ 0\le t<\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ 4(t-1)\left(t-\frac{1}{4}\right)<0\end{cases}\\ 0\le t<\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}<t<1\end{cases}\\ 0\le t<\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le t<1\\ 0\le t<\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le t<1.$$

- Перейдем к исходной замене:

$$0\le\log_9\left(3x^2-4x+2\right)<1\Leftrightarrow\log_9 1\le\log_9\left(3x^2-4x+2\right)<\log_9 9\Leftrightarrow 1\le 3x^2-4x+2<9$$

(т.к. функция $f(p)=\log_9 p$ - возрастающая).

$$1\le 3x^2-4x+2<9\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-4x+2\ge 1\\ 3x^2-4x+2<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-4x+1\ge 0\\ 3x^2-4x-7<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-3x-x+1\ge 0\\ 3x^2+3x-7x-7<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3x-1)(x-1)\ge 0\\ (3x-7)(x+1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{3}\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -1<x<\frac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le\frac{1}{3}\\ 1\le x<\frac{7}{3}\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\left(-1,\frac{1}{3}\right]\cup\left[1,\frac{7}{3}\right)$.