Решение задания 18. Тренировочный вариант 232 Александра Ларина.

18. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0\\ ax-y-4a-2=0\end{cases}$$

имеет четыре решения?

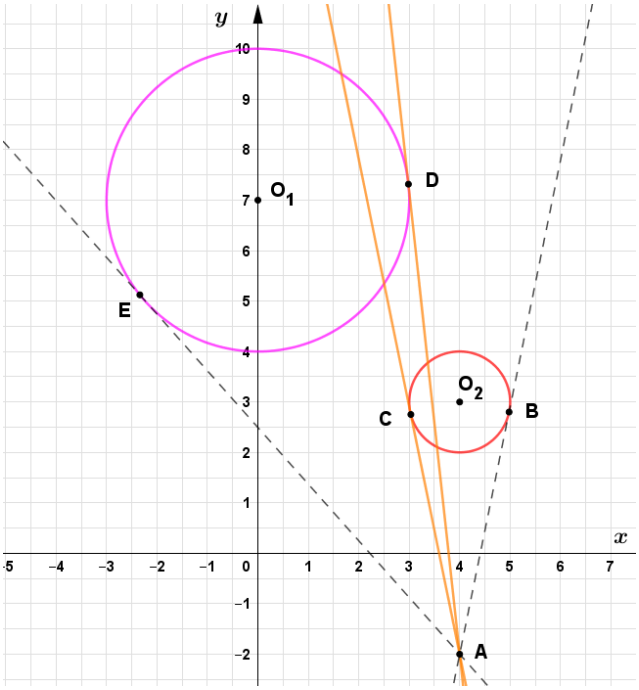
Решение:

$$\begin{cases}\left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0\\ ax-y-4a-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+(y-7)^2=9 \quad (*)\\ (x-4)^2+(y-3)^2=1 \quad (**)\end{array}\right.\\ y=a(x-4)-2\end{cases}$$

$(*)$: $x^2+(y-7)^2=9$ - окружность с центром $O_1(0,7)$ и радиусом $R=3$.

$(**)$: $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ - окружность с центром $O_2(4,3)$ и радиусом $R=1$.

$y=a(x-4)-2$ - пучок прямых, проходящих через точку $A(4,-2)$.



Пусть B,C - точки касания прямой $y=a(x-4)-2$ с окружностью $(**)$ с, а D,E - с окружностью $(*)$. Система будет иметь 4 решения, если прямая будет пересекать окружности в 4 точках. На рисунке слева оранжевым цветом выделены пограничные случаи расположения прямой в таком случае (4 решения от момента касания в точке D до момента касания в точке C при повороте прямой против часовой стрелки, не включая данные значения).

Найдем соответствующие значения параметра a. Воспользуемся формулой нахождения расстояния от точки с координатами (x_0,y_0) до прямой $ax+by+c=0$: $\rho=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Расстояние от точки O_1 до прямой $y=a(x-4)-2$ равно $\dfrac{|-7-4a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a+9|}{\sqrt{a^2+1}}$.

С другой стороны, расстояние от точки O_1 до прямой $y=a(x-4)-2$ равно радиусу окружности $(*)$, откуда $\dfrac{|4a+9|}{\sqrt{a^2+1}}=3\Leftrightarrow(4a+9)^2=9(a^2+1)\Leftrightarrow 16a^2+72a+81=9a^2+9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7a^2+72a+72=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{36+6\sqrt{22}}{7} \\ a=-\dfrac{36-6\sqrt{22}}{7} \end{array}\right.$. Поскольку касание происходит в точке D, то угловой коэффициент прямой в случае касания в точке D должен быть меньше, чем в случае касания в точке E, поэтому $a=-\dfrac{36+6\sqrt{22}}{7}$.

Аналогичным образом находим значения параметра в случае касания с окружностью $(**)$:

$\dfrac{|4a-3-4a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}=1 \Leftrightarrow 25=a^2+1 \Leftrightarrow a^2=24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{6} \\ a=-2\sqrt{6} \end{array}\right.$. Касание прямой с окружностью в точке C соответствует значению $a=-2\sqrt{6}$ (при $a=2\sqrt{6}$ - касание в точке B).

Окончательно получим, что система имеет 4 решения при $a \in \left(-\dfrac{36+6\sqrt{22}}{7};-2\sqrt{6}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{36+6\sqrt{22}}{7};-2\sqrt{6}\right)$.