$$\text{При каких } a \text{ уравнение } \sin(x + 4a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x - 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a \quad (1)$$

не имеет решений?

Решение

Применим формулу суммы синусов и произведем оценку модуля, используя неравенства: $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$, $|\cos \alpha| \leq 1$:

$$|4x - x^2 - a| = 2 \left| \sin\left(\frac{x^2 - 4x + a}{4}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x^2 - 8x - 15a}{4}\right) \right| \leq \left| \frac{x^2 - 4x + a}{2} \right|. \quad (2)$$

Неравенство (2) справедливо лишь при тех x , при которых выражение под модулем равно нулю. Значит, оно не может выполняться, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен:

$\frac{D}{4} = 4 - a < 0$, т.е. при $a > 4$. С другой стороны, если квадратный трехчлен имеет

корень, то при этом значении равенство (1) выполняется (синус и левая часть в (2) равны нулю).

Ответ: $a > 4$.