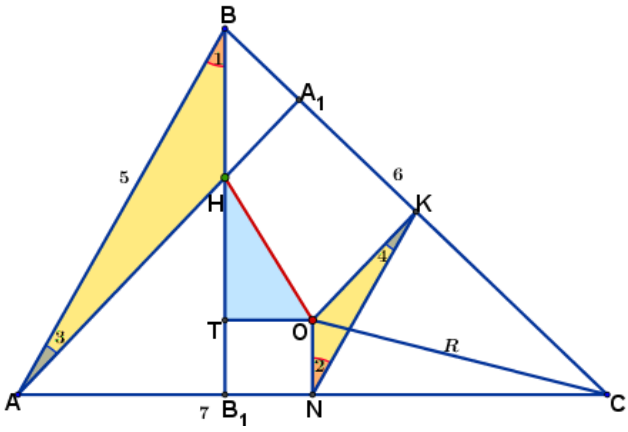
№16 *вариант* 237.

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, точка O – центр описанной окружности, точка K – середина BC.
а)Докажите, что отрезок AH вдвое длиннее отрезка OK.
б)Найдите длину отрезка OH, если известно, что $AB = 5, BC = 6, AC = 7$.



Решение.
а)O – центр окружности, описанной около $\Delta ABC \Longrightarrow$ OK и ON – серединные перпендикуляры к BC и AC.
Тогда KN – средняя линия $\Delta ABC, KN = \frac{1}{2}AB, KN \parallel AB$.
$BH \perp AC, ON \perp AC; AH \perp BC, OK \perp BC \Longrightarrow BH \parallel ON, AH \parallel OK$.
$\Delta AHB \sim \Delta KON$, т. к. $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ – как острые углы с соответственно параллельными сторонами.
Тогда $\frac{AH}{OK} = \frac{AB}{KN} = \frac{2}{1}$, т. е. $AH = 2OK$.

б)$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p \cdot (p-AC)(p-BC)(p-AB)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$; $OC = R$ – радиус описанной около ΔABC окружности; $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}; CN = \frac{1}{2}AC = \frac{7}{2}; ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{35}{4\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{49}{4}} = \frac{7}{4\sqrt{6}}; BH = 2ON$. Проведем $OT \parallel AC$, тогда $HT = BB_1 - 3ON$.

$AC \cdot BB_1 = 12\sqrt{6}$ $(2S_{\Delta ABC})$, откуда $BB_1 = \frac{12\sqrt{6}}{7}, HT = \frac{12\sqrt{6}}{7} - \frac{21}{4\sqrt{6}} = \frac{141}{28\sqrt{6}}$.

Из ΔBB_1C по т. Пифагора найдем $B_1C = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = \sqrt{36 - \frac{864}{49}} = \frac{30}{7}$, тогда

$TO = B_1N = B_1C - CN = \frac{30}{7} - \frac{7}{2} = \frac{11}{14}$. Из ΔHTO по т. Пифагора найдем

$OH = \sqrt{HT^2 + TO^2} = \sqrt{\left(\frac{141}{28\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{310}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{310}}{8}$.