14 ТВ № 222 Александра Ларина.

Куб целиком находится в правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S* так, что одна грань куба принадлежит основанию, одно ребро целиком принадлежит грани *SBC*, а грани *SAB* и *SAC* содержат по одной вершине куба. Известно, что ребро *AB* в 2 раза больше высоты пирамиды.

А) Докажите, что плоскость, проходящая через вершины куба, принадлежащие граням *SAB* и *SAC*, и вершину пирамиды, перпендикулярна плоскости *ASD*, где *D* – середина стороны *BC*.

Б) Найдите отношение объемов пирамиды и куба.

Ответ: Б) $(2+3\sqrt{3})^3/72$.

Решение:

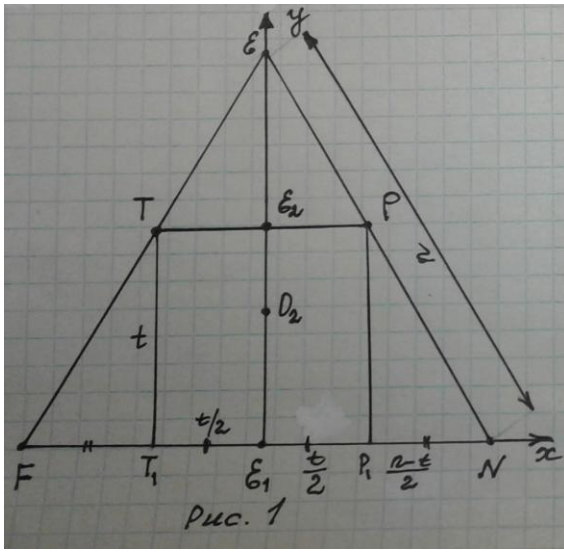


Рис. 1

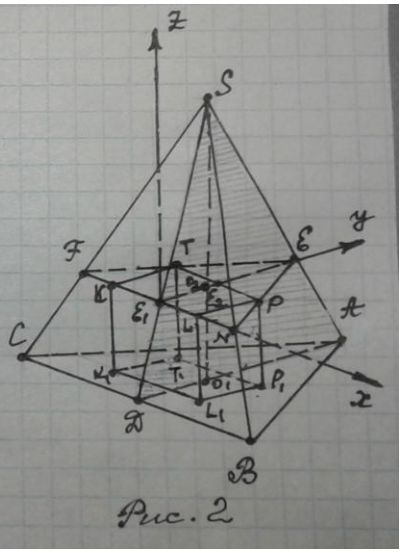


Рис. 2

Введем обозначения: $m-$ сторона основания, $H-$ высота заданной пирамиды; $n-$ сторона основания, $h-$ высота отсеченной пирамиды, $V-$ объем заданной пирамиды, V_k- объем куба, $t-$ ребро куба, $k-$ коэффициент подобия названных пирамид.

Введем обозначения вершин куба, другие необходимы точки, как указаны они на рисунке 1. В целях удобства сделаем выносной рисунок (рис.2) сечения заданной пирамиды плоскостью, содержащей верхнюю грань куба. Отметим, что эта плоскость, т.е. плоскость (FEN) будет параллельна плоскости (ABC). А также: $EE_1 \perp FN,\ FE_1 = NE_1$.

Далее:

1) Так как $PE \parallel LE_1 \subset FN$, то: $\Delta PNL \sim \Delta ENE_1 \Rightarrow EE_1 : PL = EN : LN$. Очевидно:

$$EE_1 = \frac{n\sqrt{3}}{2};\ E_1N = \frac{n}{2};\ E_1L = \frac{t}{2};\ \frac{n\sqrt{3}}{2} : t = \frac{n}{2} : \left(\frac{n-t}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{t} = \frac{2}{n-t} \Leftrightarrow 2t = n\sqrt{3} - t\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})t = n\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};\ n = \frac{(2+\sqrt{3})t}{\sqrt{3}}.$$

2) Заданная и отсеченная пирамиды гомотетичны с коэффициентом гомотетии k. Потому соответствующие их линейные элементы будут пропорциональны с тем же коэффициентом пропорциональности, т.е. $n = km,\ h = kH$. По условию задачи: $H = m/2$, но тогда:

$$h = kH = km/2.\ t = \frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{km\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$ С другой стороны: $h = H - t$, т.е. $\frac{km}{2} = \frac{m}{2} - \frac{km\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Leftrightarrow k\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \cdot \frac{2+3\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2+3\sqrt{3})k = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2+\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}. \qquad t = \frac{km\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}} \cdot m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{m\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}.$$

3) $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{m^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{m}{2}=\frac{m^3\sqrt{3}}{24}.\ V_k=t^3=\frac{m^3\cdot 3\sqrt{3}}{(2+3\sqrt{3})^3}.\ \frac{V}{V_k}=\frac{m^3\sqrt{3}}{24}\cdot\frac{(2+3\sqrt{3})^3}{m^3\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{(2+3\sqrt{3})^3}{72}.$

Фактически решили мы подзадачу Б).

4) Теперь исследуем подзадачу А).

Рассмотрим пирамиду, отсекаемую от заданной пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание куба, в декартовой системе координат, как показано на рисунке 2. Там согласно обозначениям, принятым выше: $FN=n,\ EE_1=\frac{n\sqrt{3}}{2},\ h=\frac{n}{2},\ O_2E=\frac{n\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{n\sqrt{3}}{6},\ t=\frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$

$\frac{t}{2}=\frac{n\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})},\ P\left(\frac{n\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})};\frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};0\right),\ T\left(-\frac{n\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})};\frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};0\right),\ S\left(0;\frac{n\sqrt{3}}{6};\frac{n}{2}\right).$

Будем искать уравнение плоскости TSP. В этих целях решим систему уравнений относительно a, b и c – коэффициентов уравнения плоскости:

$$\begin{cases} -\frac{n\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}a+\frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}b=d \\ \frac{n\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}a+\frac{n\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}b=d \\ \frac{n\sqrt{3}}{6}b+\frac{n}{2}c=d \end{cases}$$

. Вычитая почленно из второго уравнения первое, будем иметь:

$\frac{n\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})}a=0,$ откуда: $a=0.$ Сложив их почленно, получим: $\frac{n\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})}b=d,\ b=\frac{(2+\sqrt{3})d}{n\sqrt{3}}.$

Полученное значение b подставим в третье уравнение системы. $\frac{n\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{n\sqrt{3}}d+\frac{n}{2}\cdot c=d \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\cdot c=d-\frac{2+\sqrt{3}}{6}d \ \Leftrightarrow\ nc=2d-\frac{2+\sqrt{3}}{3}d \ \Leftrightarrow\ nc=\frac{6d-2d-\sqrt{3}d}{3} \ \Leftrightarrow\ c=\frac{(4-\sqrt{3})d}{3n}.$

Таким образом, уравнение названной плоскости: $\frac{(2+\sqrt{3})d}{n\sqrt{3}}y+\ \frac{(4-\sqrt{3})d}{3n}z-d=0$ или

$(2\sqrt{3}+3)y+(4-\sqrt{3})z-3n=0.$ Ее нормальный вектор: $\overline{n_1}\left(0;2\sqrt{3}+3;4-\sqrt{3}\right).$

Уравнение плоскости ASD известно заведомо: $x=0$. Ее нормальный вектор: $\overline{n_2}(1;0;0).$

$\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0\cdot 0+(2\sqrt{3}+3)\cdot 0+(4-\sqrt{3})\cdot 0=0,\ |\overline{n_1}|\neq 0,\ |\overline{n_2}|\neq 0.$ А это значит, что $(TSP)\perp(ASD).$