14 – 1*_ЕГЭ-2018. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания точки B_1 и C_1, причем BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6,\ BB_1 = 15,\ B_1C_1 = 8.$

Ответ:

Решение: б) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}.$

а)

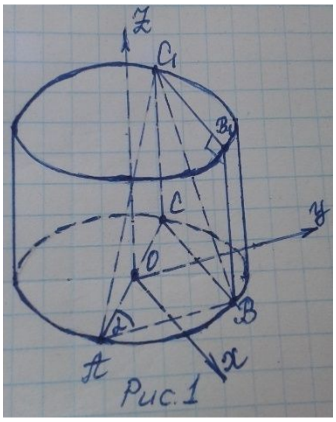

Рис.1

Пусть O – центр основания цилиндра, центр окружности. Проведем образующую цилиндра CC_1, соединим отрезком точки C и A (см. рис.1). Так как:

– отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра,

– проекцией каждой точки этой оси служит центр основания цилиндра, то проекция отрезка AC_1 на основание содержит точку O. То есть AC является диаметром основания цилиндра.

Тогда вписанный угол ABC, опирающийся на диаметр окружности, обязан быть равным 90°. То есть $AB \perp BC.$

Введем декартову систему координат, как показано на рис. 1. Пусть $AC = 2R,\ \angle CAB = \alpha$, $CC_1 = h.$ Имеем: $A(R\sin\alpha; -R\cos\alpha; 0)$ (рис.2), $B(R\sin\alpha; R\cos\alpha; 0),\ C_1(-R\sin\alpha; R\cos\alpha; h),\ B_1(R\sin\alpha; R\cos\alpha; h),\ \overline{AB}(0; 2R\cos\alpha; 0),$ $\overline{BC_1}(-2R\sin\alpha; 0; h).$

$\overline{AB}\cdot\overline{BC_1} = 0\cdot(-2R\sin\alpha) + 2R\cos\alpha\cdot 0 + 0\cdot h = 0,$ откуда: $AB \perp BC_1$, т.е. $\angle ABC_1 = 90^\circ.$

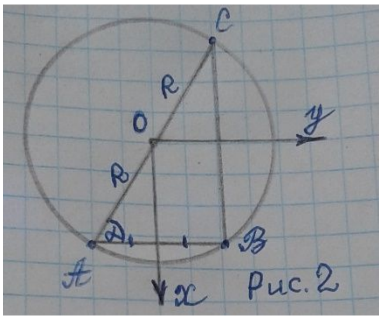

Рис.2

б) По условию: $h = 15,\ 2R = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{64+36} = 10,$ $\sin\alpha = BC/2R = 8/10,\ \cos\alpha = AB/2R = 6/10,\ A(4;-3;0),$ $B(4;3;0),\ C_1(-4;3;15),\ B_1(4;3;15),\ \overline{BB_1}(0;0;15),\ \overline{AC_1}(-8;6;15).$

Если φ – искомый угол, то:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{AC_1}\cdot\overline{BB_1}\right|}{\left|\overline{AC_1}\right|\cdot\left|\overline{BB_1}\right|} = \frac{\left|-8\cdot 0 + 6\cdot 0 + 15\cdot 15\right|}{\sqrt{64+36+225}\cdot\sqrt{0+0+15^2}} = \frac{15\cdot 15}{\sqrt{325}\cdot 15} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{25\cdot 13}} = \frac{15}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}. \qquad \varphi = \arccos\frac{\sqrt{15}}{5}.$$