18_Тренировочная работа № 246 А.Ларина.

Найдите все значения *a*, при которых система

$$\begin{cases} \log_2(3-x+y)+3=\log_2(25-6x+7y) & (1) \\ y+2=(x-2a)^2+a+2x & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение (2)

Найдем ограничения на переменные исходя из условия (1). Ясно, что при выполнении неравенства $3-x+y>0$, т.е. $y>x-3$, будет выполнено и неравенство $25-6x+7y>0$.

Преобразуем уравнение (1). При $y>x-3$ уравнение (1) принимает вид: $8\cdot(3-x+y)=25-6x+7y \Leftrightarrow 24-8x+8y=25-6x+7y \Leftrightarrow y=2x+1$. Теперь появилась возможность заменить неравенство $y>x-3$ ему равнозначным, т.е. неравенством $2x+1>x-3$ или же более простым: $x>-4$.

Для $x>-4$ уравнение (2) примет вид: $2x+1+2=x^2-4ax+4a^2+a+2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-4ax+4a^2+a-3=0$ (*)

Уравнение (*) будет иметь ровно два корня, удовлетворяющие системе, если его четверть дискриминанта будет положительной, и при этом оба корня будут больше -4.

Переменная *y* от переменной *x* зависит линейно. Тогда каждому корню уравнения (*) x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ будет соответствовать единственное значение переменной y, которое удовлетворяет условию $y>x-3$.

Коли это так, то нам остается решить относительно параметра a единственное неравенство $x_1>-4$. При этом найденные значения *a* (если, конечно, они существуют) обеспечат выполнение и условия $x_2>-4$ автоматически.

$x_1=2a-\sqrt{4a^2-4a^2-a+3}=2a-\sqrt{3-a}$. Согласно сказанному выше: должно выполняться строгое неравенство $3-a>0$. Тогда же: $2a-\sqrt{3-a}>-4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-a}<2a+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ 2a+4>0 \\ 3-a<4a^2+16a+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ a>-2 \\ 4a^2+17a+13>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2<a<3 \\ \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{-17-\sqrt{289-208}}{8} \\ a>\dfrac{-17+\sqrt{81}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<a<3 \\ \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{-17-9}{8} \\ a>\dfrac{-17+9}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<a<3 \\ \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{-13}{4} \\ a>-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -1<a<3.$$

О т в е т: (–1; 3)

==========

Замечание: решение, приведенное здесь, по твердому убеждению автора решения, по простоте не уступает использованию необходимых и достаточных условий расположения корней квадратного трехчлена на числовой прямой.