14_ЕГЭ_2019_Тренировочная работа № 247 Ларина А.А.

Через середину ребра AC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S – вершина) проведены плоскости α и β, каждая из которых образует угол 30° с плоскостью ABC. Сечения пирамиды этими плоскостями имеют общую сторону длины 1, лежащую в грани ABC, а плоскость α перпендикулярна ребру SA.

А) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью β.

Решение: (вариант 2)

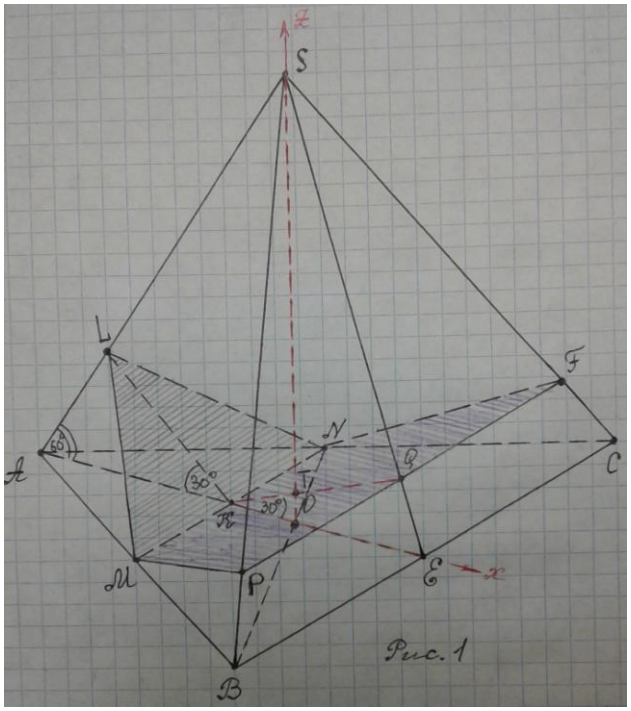


Рис.1

Дополнительные построения и обозначения (по рисунку 1):

$O-$ центр основания пирамиды, $M, N, E-$ середины сторон ΔABC, $\Delta MLN-$ сечение пирамиды плоскостью α, $MNFP-$ сечение пирамиды плоскостью β.

Найдем некоторые параметры пирамиды, которые понадобятся для получения других параметров. Известно: $MN=1$. Так как $MN-$ средняя линия ΔBAC, то $BC=AB=AC=2$.

$$AE=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};\ AO=\frac{2}{3}AE=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};$$

$$OE=\frac{AE}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$AK=KE=\frac{AE}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$OK=KE-OE=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Заданная пирамида зеркально симметрична относительно плоскости ASE. Отсюда: $\angle AKL-$ линейный угол двугранного угла, заключенного между плоскостями (ABC) и α,

$$\angle AKL=30^\circ,\ \angle SAE=60^\circ,\ SO=AO\cdot tg60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=2.$$

А) По условию: $AL\perp\alpha$, а это значит, что ΔMLN служит проекцией ΔAMN на плоскость α, угол между которыми равен 30°. Следовательно,

$$S(MLN)=S(AMN)\cdot\cos30^\circ=\frac{MN^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}.$$

Б) Из соображений зеркальной симметрии будем иметь: сечение пирамиды плоскостью β будет служить равнобедренная трапеция $MPFN$, с основаниями MN (меньшее основание), PF (большее основание), $KQ-$ ее высота (см. рисунок).

Рассмотрим ΔSOE и секущую KQ. Наша цель – найти большее основание PF и высоту KQ трапеции. Поступим так: будем рассматривать ΔSOE и секущую KF в плоскости xOz, как показано на рис.2.

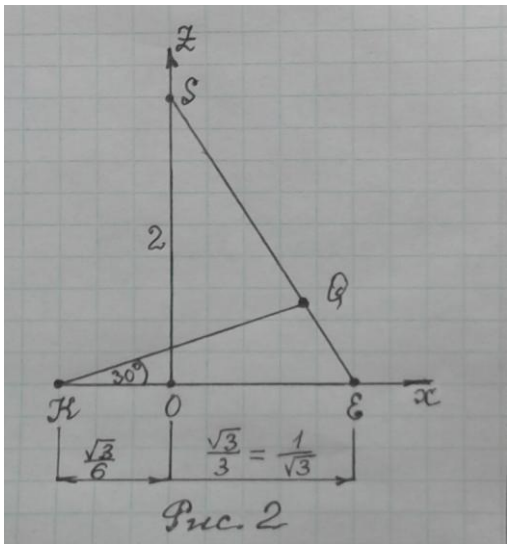


Рис. 2

Имеем: $K\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$, $S(0;2)$.

Уравнение прямой KQ, угловой коэффициент которой равен $tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, проходящей через точку K: $z=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ (*). А уравнение прямой SE в отрезках: $\frac{x}{1/\sqrt{3}}+\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow$ $z=-2\sqrt{3}x+2$ (**). Из равенств (*) и (**):

$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{6}=-2\sqrt{3}x+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+1+12\sqrt{3}x=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14\sqrt{3}x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11\sqrt{3}}{42}$. $z=-2\sqrt{3}\cdot\frac{11\sqrt{3}}{42}+2=-\frac{11}{7}+2=\frac{3}{7}$. Таким образом, мы нашли: $F\left(\frac{11\sqrt{3}}{42};\frac{3}{7}\right)$. Теперь найдем отношение λ, в котором точка F делит ребро SE, считая от точки S. $z_F=\frac{z_S+\lambda z_E}{1+\lambda}$. $\frac{2+\lambda\cdot 0}{1+\lambda}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow 3+3\lambda=14 \Leftrightarrow \lambda=\frac{11}{3}$. Найденное значение λ подтверждается и координатами точек S и E по оси x. Действительно,

$x_F=\frac{x_S+\lambda x_E}{1+\lambda}$. $\left(0+\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{11}{3}\right)=\frac{11\sqrt{3}}{42} \Leftrightarrow \frac{11}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{14}=\frac{11\sqrt{3}}{42} \Leftrightarrow$

$\frac{11\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{14}=\frac{11\sqrt{3}}{42} \Leftrightarrow \frac{11\sqrt{3}}{42}=\frac{11\sqrt{3}}{42}$.

$$\frac{SQ}{SE}=\frac{11}{14};$$

$$PF \parallel MN \parallel BC \Rightarrow PF \parallel BC \Rightarrow \Delta PSF \sim \Delta BSC \Rightarrow \frac{PF}{BC}=\frac{SQ}{SE};\quad \frac{PF}{2}=\frac{11}{14} \Leftrightarrow PF=\frac{11}{7}.$$

$\overline{KF}=\left(\overline{\frac{11\sqrt{3}}{42}+\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{3}{7}}\right)=\left(\overline{\frac{3\sqrt{3}}{7};\frac{3}{7}}\right)$. $\left|\overline{KF}\right|=\sqrt{\frac{27}{49}+\frac{9}{49}}=\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{6}{7}$.

$S(MNPF)=\frac{1}{2}(MN+PF)\cdot KQ=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{11}{7}\right)\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{7}\cdot\frac{6}{7}=\frac{54}{49}$.

Ответ: А) $\frac{3}{8}$. Б) $\frac{54}{49}$.