15_Тренировочная работа № 246 А.Ларина.

Решите неравенство $\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\frac{1}{3}-x}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}$.

Решение:

Найдем ограничения на x. $\begin{cases} x<1/3 \\ x\neq -1/6 \\ 2x+1/3\neq \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1/3 \\ x\neq -1/6. \\ x\neq -2/3\end{cases}$ Далее заданное неравенство будем рассматривать только на множестве $M=(-\infty;-2/3)\cup(-2/3;-1/6)\cup(-1/6;1/3)$.

На M: $\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\left(\left(\frac{1}{3}-x\right):\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\frac{1}{\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}-\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|>0$. Пусть

$\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)=u,\quad \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|=v,$ тогда: $\frac{u^2}{v}-3u+2v>0 \Leftrightarrow \frac{u^2-3uv+2v^2}{v}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{u^2-uv-2uv+2v^2}{v}>0 \Leftrightarrow \frac{u(u-v)-2v(u-v)}{v}>0 \Leftrightarrow (u-v)(u-2v)v>0$.

Перейдем к переменной x и воспользуемся методом рационализации.

$$\left(\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\cdot\left(\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|^2\right)\cdot\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{1}{3}-x\right)^2-\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{3}-x\right)-\left(4x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}\right)\right)\cdot\left(\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2-1\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{3}x+x^2-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(2x+\frac{1}{3}+1\right)\cdot\left(2x+\frac{1}{3}-1\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3x^2-2x)\cdot\left(-4x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2x+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{2}{3}\right)>0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена. $4x^2+\frac{7}{3}x-\frac{2}{9}=0$. $\Leftrightarrow 36x^2+21x-2=0$.

$x_{1,2}=\frac{-21\pm\sqrt{441+288}}{72}=\frac{-21\pm\sqrt{729}}{72}=\frac{-21\pm 27}{72}$. $\quad x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{12}$. Далее:

$x\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)>0 \Leftrightarrow x\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0$.

На M $x-\frac{1}{3}<0$. Тогда: $x\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{12}\right)<0$.

Решим последнее неравенство методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty;\ -2/3)$	$(-2/3;\ 0)$	$(0;\ 1/12)$	$(1/12;\ 1/3)$
Знак выражения	-	+	-	+

Итак, ответ: $(-\infty;\ -2/3)\cup(0;\ 1/12)$.

Полученный результат с ограничениями на x согласуется.