18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2-5+\ln(x+a)\right)^2=\left(x^2-5\right)^2+\ln^2(x+a)$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$

Решение.

Пусть $m=x^2-5, n=\ln(x+a)$, уравнение примет вид:

$(m+n)^2=m^2+n^2 \iff m^2+2mn+n^2-m^2-n^2=0 \iff 2mn=0 \iff mn=0.$

Тогда исходное уравнение равносильно следующему:

$$(x^2-5)\cdot\ln(x+a)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5=0,\\ x+a>0,\end{cases}\\ \ln(x+a)=0;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=5,\\ a>-x,\end{cases}\\ \mathrm{x}+\mathrm{a}=1;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\sqrt{5},\\ a>\sqrt{5},\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{5},\\ a>-\sqrt{5},\end{cases}\\ x=1-a.\end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет: корень $x=-\sqrt{5}$ при каждом $a>\sqrt{5}$;
корень $x=\sqrt{5}$ при каждом $a>-\sqrt{5}$;
корень $x=1-a$ при $\forall a$.

Найдём корни уравнения $\in[0;3]$: $x=-\sqrt{5}\notin[0;3]$; $x_1=\sqrt{5}\in[0;3]$ при $a>\sqrt{5}$;
$x=1-a,\ 0\le 1-a\le 3 \iff -1\le -a\le 2 \iff -2\le a\le 1 \Rightarrow x_2=1-a\in[0;3]$ при $-2\le a\le 1.$
Совпадение корней: $x_1=x_2, \sqrt{5}=1-a \iff a=1-\sqrt{5}.$

Составим таблицу зависимости количества корней уравнения на отрезке $[0;3]$ от значения параметра a, где отразим все полученные факты:
$\left(5>4 \iff \sqrt{5}>2 \iff -\sqrt{5}<-2;\ 1-\sqrt{5}>-2 \iff 3>\sqrt{5} \iff 9>5\right).$

a	$a\le-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}<a<-2$	$-2\le a\le 1-\sqrt{5}$	$a=1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{5}<a\le 1$	$a>1$
x_1	–	+	+	+	+	+
x_2	–	–	+	+	+	–
$x_1=x_2$			–	+	–	
ИТОГО	0	1	2	1	2	1

Уравнение имеет единственный корень на $[0;3]$ при $a\in(-\sqrt{5};\,-2)\cup\{1-\sqrt{5}\}\cup(1;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\sqrt{5};\,-2)\cup\{1-\sqrt{5}\}\cup(1;\,+\infty)$.