18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня?

Решение.

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}|3x|-2x-2-a=0,\\ x^2-2x-a\neq 0;\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}a=|3x|-2x-2,\\ a\neq x^2-2x.\end{cases}$$

Систему решим графически в плоскости xOa.

(1) $a=|3x|-2x-2=\begin{cases}x-2, & \text{если } x\geq 0,\\ -5x-2, & \text{если } x<0.\end{cases}$

Графиком уравнения является объединение двух лучей с вершиной в точке $A(0;-2)$.

(2) $a=x^2-2x=x(x-2)$, графиком является парабола, ветви направлены вверх; нули функции:

$x(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$ $x_0=\dfrac{0+2}{2}=1,$ $y_0=1-2=-1;$ $B(1;-1)$ – вершина параболы.

Найдём координаты точек пересечения графиков (1)и (2):

$x^2-2x=|3x|-2x-2 \;\Leftrightarrow\; x^2-3|x|+2=0 \;\Leftrightarrow\; |x|^2-3|x|+2=0.$

Пусть $t=|x|, t\geq 0$, уравнение примет вид: $t^2-3t+2=0, t_1=1; t_2=2$ (по обратной т. Виета).

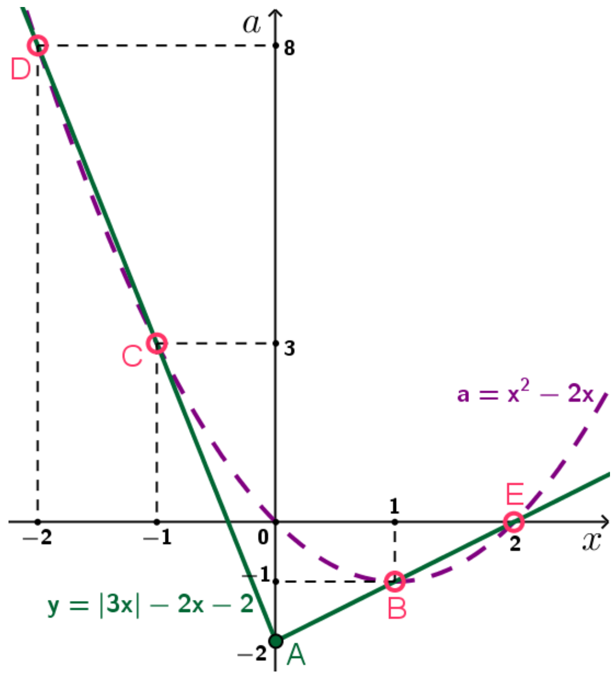
Вернёмся к переменной x: $\left[\begin{array}{l}|x|=1,\\ |x|=2;\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x=\pm 1,\\ x=\pm 2.\end{array}\right.$

$\begin{cases}x=-1,\\ a=(-1)^2+2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1,\\ a=3;\end{cases}$ $C(-1;3);$

$\begin{cases}x=1,\\ a=1^2-2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ a=-1;\end{cases}$ $B(1;-1);$

$\begin{cases}x=-2,\\ a=(-2)^2+4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2,\\ a=8;\end{cases}$ $D(-2;8);$

$\begin{cases}x=2,\\ a=(2)^2-4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ a=0;\end{cases}$ $E(2;0).$



При каждом конкретном значении a_0 решением исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения прямой $a=a_0$ с графиком (1), исключая точки B, C, D, E.

Таким образом, в зависимости от значения параметра a исходное уравнение имеет:

при $a<-2$ не имеет корней;

при $a=-2;-1;0;3;8$ ровно 1 корень;

при $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$ два различных корня.

Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.