Обобщение метода интервалов или о приеме рационализации

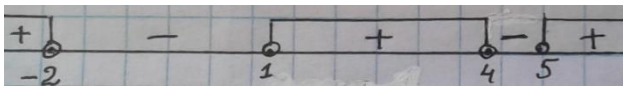
«Известно, что неравенство вида $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)>0,$ где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные (действительные) числа, экономнее всего решаются так называемым методом интервалов. Теоретическая основа этого метода состоит в том, что при любом x, большем наибольшего из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, данное неравенство, очевидно, выполняется, поскольку все сомножители в левой части положительны, а в дальнейшем, когда x «движется» справа налево, левая часть меняет при переходе через каждый корень x_i, поскольку при этом меняет знак ровно один сомножитель – именно $x-x_i$.

На практике для применения этого метода достаточно лишь отметить на числовой оси числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поставить знак "+" над бесконечным интервалом, состоящим из x, больших, чем все эти числа, знак "–" – на следующим влево интервале, затем знак "+" и т.д. После этого в качестве решений неравенства берутся значения x из интервалов, над которыми стоит знак "+".

Так, например, решение методом интервалов неравенства

$$(x-1)\ (x+2)\ (x-4)\ (x-5)>0$$

состоит из чертежа 1 и ответа: $x<-2,\ 1<x<4,\ x>5.$



Черт. 1

Метод интервалов применим, естественно, и к неравенствам с другими знаками: $<, \leq, \geq$. Соответствующие изменения в технике его применения очевидны.

Главное преимущество метода интервалов по сравнению с перебором всех логически возможных случаев распределения знаков сомножителей – существенная экономия, без которой иногда практически очень трудно или невозможно довести решение до конца. В то же время метод интервалов имеет значительно более узкую область применения: перебор приводит к цели, хотя бы в принципе, при решении любого неравенства, где левая часть разложена на множители[1], а для применения метода интервалов нужно еще, чтобы эти множители были линейными двучленами, т.е. левая часть должна быть целой алгебраической функцией (многочленом), разложенной на множители. Правда, метод интервалов очевидным образом обобщается на рациональные функции (частные двух многочленов), но это обобщение не так уж широко раздвигает рамки его применения[2].

Возникает естественная мысль – научиться «рационализировать» неравенства, т.е. заменять сложные, трансцендентные неравенства на равносильные целые алгебраические неравенства. Другими словами, для каждой нерациональной функции следует попытаться подобрать такую рациональную функцию, знак которой при любом x совпадает со знаком исходной функции.

Так, знак функции a^x-b при $b>0$ совпадает, очевидно, со знаком рациональной функции $(a-1)\ (x-\log_a b)$, поэтому в любом неравенстве трансцендентный множитель a^x-b можно заменить на рациональное выражение $(a-1)\ (x-\log_a b)$, получив при этом неравенство, равносильное исходному.

Однако такая «равносильная» рационализация возможна далеко не всегда даже для

---

[1] Здесь и в дальнейшем мы считаем, если не указано противное, что в правой части решаемого неравенства стоит нуль.

[2] Можно также сформулировать некоторые условия применимости метода интервалов для произведения функций сколь угодно общего вида, но эти условия будут включать в себя такие понятия, как непрерывность функций, кратность корней, а для их доказательства потребуются теоремы дифференциального исчисления, далеко выходящие за пределы школьной математики, и, частности, формула Тейлора.

самых простых функций. Например, уже для функции $\log_a x$ нельзя подобрать рациональную функцию, обладающую нужным свойством: это следует хотя бы из того, что рациональная функция может не иметь смысла лишь в конечном числе точек – в корнях знаменателя, а $\log_a x$ не определен для всех $x \le 0$. Поэтом при замене $\log_a x$ на любую рациональную функцию не может не произойти расширения области допустимых значений (ОДЗ) неравенства. Если же допустить расширение ОДЗ, то множитель $\log_a x$ можно заменить на $(a-1)\ (x-1)$.

Согласившись на расширение ОДЗ, мы можем провести рационализацию для достаточно широкого набора функций. Укажем наиболее употребительные замены (ниже мы будем называть их стандартными) [3]:

$$a^\alpha - b \text{ на } (a-1)\ (\alpha - \log_a b),$$
$$\log_a b - \alpha \text{ на } (a-1)\ (b - a^\alpha),$$
$$\sqrt[2k]{a} - b \text{ на } a - b^{2k},$$
$$|a| - b \text{ на } a^2 - b^2.$$

(В этих формулах везде считается, что $b > 0$, в двух последних допускается еще $b = 0$.)

Два замечания по поводу практического применения этих замен.

Во-первых, в примерах, как правило, a, b и α являются функциями, и потому каждая из указанных замен приводит обычно к изменению ОДЗ, причем это очень важно, ОДЗ нового неравенства ш и р е, чем у исходного, так что потери решений не произойдет, а полученные в конце решения надо еще проверить на вхождение в ОДЗ исходного неравенства. Другими словами, решениями исходного неравенства будут те из полученных решений, которые лежат в его ОДЗ – в такой ситуации мы будем говорить, что *новое неравенство равносильно исходному в его ОДЗ*. Имея это в виду, целесообразно начинать решение с вычисления ОДЗ исходного неравенства.

Во-вторых, когда a, b и α зависят от x, получаемое после замены неравенство вовсе не обязательно будет рациональным: скажем, при решении неравенства $\log_x(x+1) - x > 0$ мы ни на шаг не продвинемся вперед, заменив его левую часть на $(x-1)\ (x+1-x^x)$. Однако в случаях более простых, например, если в первой формуле a и b постоянны, после замены мы получаем неравенство хотя и необязательно рациональное, но, по крайней мере, более «близкое» к рациональному, чем исходное.

С помощью стандартных замен легко решаются комбинированные неравенства, подобные следующему:

$$(2^{x^2+1} - 32)\ (|3x+1| - 4) \cdot (\sqrt[4]{x+1} - 1)\ \log_{x+3}(x^2 - 6x + 6) < 0.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x+1 \ge 0,\ x+3 > 0,\ x+3 \ne 1,\ x^2 - 6x + 6 > 0,$ или

$$-1 \le x < 3 - \sqrt{3},\ \ x > 3 + \sqrt{3}.$$

Сделав все необходимые замены, мы получаем неравенство, равносильное исходному в его ОДЗ:

$$(x^2 + 1 - 5)\left[(3x+1)^2 - 16\right]\left[(x+3) - 1\right]\left[(x^2 - 6x + 6) - 1\right]\left[(x+1) - 1\right] < 0,$$

из которого последовательно будем иметь:

---

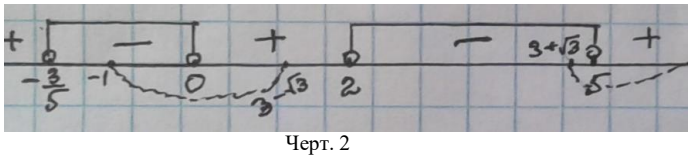
[3] Этот список нетрудно пополнить, но мы ограничиваемся только теми заменами, которые ниже используются в примерах.

$$(x+2)\ (x-2)\ (3x+5)\ (3x-3)\ (x+2)\ (x^2-6x+5)x<0,$$

$$(x+2)^2(x-1)^2(x-2)\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-5)x<0,$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2)\ (x-5)x<0\,.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов (черт. 2) на этом же чертеже



Черт. 2

отбираем те из его решений, которые входят в найденную вначале ОДЗ исходного неравенства. В результате получаем ответ:

$$-1\le x<0,\ \ 3+\sqrt{3}<x<5.$$

После этого искусственного примера, иллюстрирующего технику приема рационализации, рассмотрим несколько примеров из практики вступительных экзаменов в МГУ. Как видно из этих примеров, рационализация быстро ведет к цели не только в случаях, когда левая часть уже разложена на множители, но и для приведения неравенства к такому виду. Кроме того, в предлагаемых решениях мы используем не только указанные выше стандартные замены, но и некоторые другие, специальные приемы рационализации.

1. (Механико-математический факультет), 1963): $|x|^{x^2-x-2}<1.$

ОДЗ этого неравенства состоит из $x\ne 0.$ После записи неравенства в виде $|x|^{x^2-x-2}-1<0$ рационализация достигается с помощью первой и четвертой замен:

$$(|x|-1)\ (x^2-x-2)<0,$$

$$(x^2-1)\ (x^2-x-2)<0,$$

$$(x-1)\ (x+1)\ (x+1)\ (x-2)<0,$$

$$(x-1)\ (x-2)<0.$$

Решения последнего неравенства – значения x из промежутка $1<x<2$ – входят в ОДЗ исходного неравенства и потому являются его решениями.

Приведенное решение, по-видимому, проще, по крайней мере, компактнее, чем два других решения, возможных здесь: использование свойств степени с основанием, большим и меньшим 1, и логарифмирование с последующим решением двух систем неравенств. Безусловно, из-за крайней простаты примера преимущество рационализации здесь не очень заметно.

В следующем примере компактность предлагаемого способа по сравнению с обычным перебором случаев видна гораздо лучше.

2. (Физический факультет, 1966):

$$\log_x\frac{2x-1}{x-1}>1.$$

ОДЗ неравенства состоит из промежутков $0<x<\frac{1}{2}$ и $x>1.$ Теперь записываем цепочку неравенств:

$$\log_x\frac{2x-1}{x-1}-1>0,$$

$$(x-1)\left(\frac{2x-1}{x-1}-x\right)>0,$$

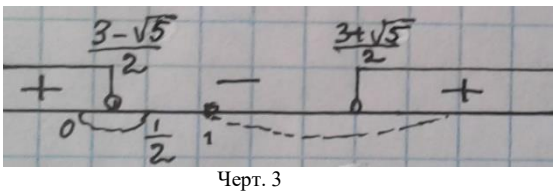
$$(x-1)\ \frac{x^2-3x+1}{x-1}<0,\ \ x^2-3x+1<0.$$

Из решений последнего неравенства

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

отбираем входящие в ОДЗ исходного неравенства. Это будет

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1}{2},\ \ 1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$ (черт. 3).



Черт. 3

3. (Физический факультет, 1966): $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0.$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x>0,\ \ 2x^2-7x+6>0,\ \ 2x^2-7x+6\neq 1,$ или что то же самое,

$$0<x<\frac{3}{2},\ \ x>2,\ \ x\neq 1,\ \ x\neq\frac{5}{2}.$$

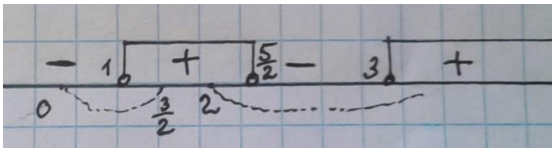
Применяя вторую и третью замены, получаем цепочку неравенств, равносильных исходному в его ОДЗ:

$$(\sqrt{2x^2-7x+6}-1)\ \left(\frac{x}{3}-1\right)>0,$$

$$(2x^2-7x+5)\ (x-3)>0,$$

$$(x-1)\ \left(x-\frac{5}{2}\right)\ (x-3)>0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (черт. 4) и совмещая его решения



Черт. 4

с ОДЗ исходного неравенства, получаем ответ:

$$1<x<\frac{3}{2},\ \ 2<x<\frac{5}{2},\ \ x>3.$$

4. (Химический факультет, 1965):

$$\frac{1}{\log_2 x}\leq\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x>0,\ \ x\neq 1.$ Перенеся все члены неравенства в левую часть, после несложных преобразований получим цепочку неравенств:

$$\frac{\log_2 \frac{x+2}{x^2}}{\log_2 x \cdot \log_2 (x+2)} \le 0, \quad \frac{x+2-x^2}{x^2(x-1)(x+1)} \le 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \ge 0, \quad \frac{x-2}{x-1} \ge 0,$$

каждое из которых равносильно исходному в его ОДЗ. Решения последнего неравенства – $x < 1,\ x \ge 2.$ В ОДЗ входят значения x из промежутков $0 < x < 1$ и $x \ge 2.$

По поводу этого примера сделаем несколько замечаний. Если не считать предложенного некоторыми поступающими грубо ошибочного решения, в котором неравенство сразу переписывалось в виде $\log_2 \sqrt{x+2} \le \log_2 x,$ то в подавляющем большинстве решений возникала, как и у нас, дробь с тремя логарифмами, после чего авторы этих решений рассматривали четыре логически возможных случая распределения знаков между этими логарифмами. При этом многие, не владея в достаточной степени логикой и техникой решения систем неравенств, допустили большое количество ошибок.

В то же время этот пример допускает решение столь же короткое, как и приведенное нами. Именно, легко заметить, что при любом допустимом значении x правая часть положительна, и, следовательно, при $0 < x < 1,$ когда левая часть отрицательна, неравенство выполняется. Если же $x > 1,$ то оба знаменателя положительны, и данное неравенство равносильно неравенству $\log_2 \sqrt{x+2} \le \log_2 x,$ решение которого уже не представляет труда. Однако, несмотря на легкость, с которой можно понять это решение, придумать его оказалось не под силу большинству решавших неравенство; дело объясняется скорее всего тем, что это решение использует несколько искусственный прием – исследование знаков частей неравенства и рассмотрение отдельных случаев расположения x относительно 1 [4].

Кроме того, это решение несколько менее универсально: оно уже не проходит так просто в случае, когда, скажем, число 2 в правой части заменено на ¾, в то время как для решения, использующего рационализацию, замена 2 даже на параметр $a > 0$ не составила бы практически дополнительных трудностей.

Для рационализации неравенств, содержащих корни и модули, обычно можно не пользоваться стандартными заменами и применять индивидуальные приемы.

Даже в случае, когда такая замена возможна, проще применить индивидуальный прием, чем соображать, для каких именно a и b воспользоваться стандартной заменой.

Так, например, для решения неравенства

$$\left|x^2 + 3x - 3\right| \le \left|x^2 - 2x - 2\right|$$

проще всего заметить, что обе его части неотрицательны, так что после возведения в квадрат мы получим равносильное ему неравенство

$$\left|x^2 + 3x - 3\right|^2 \le \left|x^2 - 2x - 2\right|^2,$$

или, что то же самое,

$$(x^2 + 3x - 3)^2 \le (x^2 - 2x - 2)^2.$$

Перенося все члены в левую часть и раскладывая разность квадратов в произведение, мы получим неравенство

$$(2x^2 + x - 5)\ (5x - 1) \le 0,$$

решения которого легко находятся методом интервалов:

---

[4] Впрочем, этот прием не так искусственен: знаки частей, как правило, исследуются при решении иррациональных неравенств, а различные возможности для основания логарифмов – при потенцировании логарифмических неравенств. Однако в таких случаях этот прием «навязывается» самим видом неравенства, чего нельзя сказать о данном примере.

$$x \le -\frac{1+\sqrt{41}}{4}, \ \ \frac{1}{5} \le x \le \frac{\sqrt{41}-1}{4}.$$

Разумеется, возведение в квадрат, которым мы здесь пользовались, есть по существу, четвертая стандартная замена при $a = x^2 + 3x - 3, \ b = \left|x^2 - 2x - 2\right|,$ но осознавать это, как видим, вовсе не обязательно. Отметим еще, что обычное решение этого неравенства – рассмотрение различных возможностей для знаков квадратных трехчленов, стоящих под знаком модуля, – было бы технически довольно сложным – в нем пришлось бы сравнивать по величине иррациональные числа (корни этих трехчленов) и, кроме того, корни трехчлена $2x^2 + x - 5.$

В следующих примерах мы применяем для рационализации как стандартные замены, так и индивидуальные приемы.

5. (Экономический факультет, 1967): $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2 - 3x + 1) \ge 0.$

ОДЗ неравенства определяется условиями:

$$x^2 - 3x + 1 > 0, \ \ x \ge 1,$$
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 0,$$
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \ne 1,$$

или, что то же самое,

$$x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \ \ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \ne 1.$$

Мы оставляем второе условие в «неразрешенном» виде, не желая, пока нет необходимости, решать иррациональное уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ и сравнивать его решения с $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Сделав вторую стандартную замену, получим неравенство

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 1) \ (x^2 - 3x) \ge 0,$$

равносильное исходному в его ОДЗ. Умножив теперь обе части на положительное (при всех допустимых x) выражение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 1),$ получим

$$\left|(x+1) - (x - 1 + 1 + 2\sqrt{x-1})\right| \cdot (x^2 - 3x) \ge 0,$$

$$\text{или } (2\sqrt{x-1} - 1) \ (x^2 - 3x) \le 0.$$

Умножая теперь обе части на $2\sqrt{x-1} + 1,$ получаем, наконец, неравенство

$$(4x - 5) \ (x - 3)x \le 0,$$

решения которого $x \le 0, \ 5/4 \le x \le 3.$

Остается из полученных решений отобрать водящие в ОДЗ. Поскольку $5/4 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3,$ то неравенству $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют лишь x из промежутка $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 3.$ Теперь следует проверить, удовлетворяют ли полученные x второму условию, определяющему ОДЗ: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \ne 1.$ Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами. Во-первых, решив уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1,$ можно найти его единственный корень $5/4$ и убедиться, что в полученный промежуток он не входит. Во-вторых, можно рассуждать следующим образом. Лишние решения, соответствующие обращению в 1 основания $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ логарифма, появляются из-за обращения в 0 множителя $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 1$ в новом неравенстве. Но в процессе решения мы

преобразовывали именно этот множитель, домножая* его на строго положительные выражения. Поэтому этот множитель равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю получившийся из него множитель $4x-5$, т.е. при $x=5/4$. Этот второй способ рассуждения есть, по существу, несколько необычный способ решения того же иррационального уравнения $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$, но в данном случае он вполне уместен для проверки, ибо фактически он уже применен в процессе решения.

6. (Филологический факультет, 1966):

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1.$$

Заменив $\cos x$ на y, $\cos 2x$ на $2y^2-1$, получаем неравенство $\log_{\frac{2y}{\sqrt{3}}}\sqrt{4y^2-1}<1$. ОДЗ этого неравенства определяется условиями: $y>\frac{1}{2}$; $y\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сделав вторую стандартную замену, получим неравенство

$$\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{12y^2-3}-2y)<0.$$

Умножая обе его части на выражение $\sqrt{12y^2-3}+2y$, положительное в ОДЗ, получим неравенство $\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8y^2-3)<0$,

или

$$\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)<0.$$

Поскольку в ОДЗ $y+\sqrt{\frac{3}{8}}>0$, то последнее неравенство приводится к виду

$$\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)<0.$$

Решения этого неравенства – значения y из промежутка $\sqrt{\frac{3}{8}}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Все эти y входят в ОДЗ, и остается решить двойное неравенство $\sqrt{\frac{3}{8}}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его решения, т.е. решения исходного неравенства:

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\arccos\sqrt{\frac{3}{8}}+2k\pi,$$

$$-\arccos\sqrt{\frac{3}{8}}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots .$$

---

* Слова «домножать» в русском языке нет (украинизм).

В заключение заметим, что изложенный здесь прием решения неравенств не является, разумеется, универсальным; он не всегда применим, не всегда сокращает и упрощает решение. С другой стороны, этими свойствами, очевидно, не обладает ни один из методов решения. В то же время круг применения рационализации представляется достаточно широким.

У п р а ж н е н и я

С помощью рационализации решить следующие неравенства:

1. $\left|x^2-4x+3\right|^{x^2-5x+4} \le 1.$
2. $\log_{x+2}\left|x^2-1\right| \le 1.$
3. $\dfrac{1}{\lg(x^2-3x)} > \dfrac{1}{\lg(x^2-4)}.$
4. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2-\dfrac{5}{2}x+1\right) \ge 0$
5. $\log_{x+p} 2 < \log_x 4 \quad \left(0 < p < \dfrac{1}{4}\right).$
6. $\log_{2\sin x}\sqrt{1+2\cos 2x} < \dfrac{1}{2}.$»

Использованная литература:

Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969. № 3. С.40-44.