№7. Раз.

Подробности: Скрыть

Пусть $a,\ b,\ c$ – действительные положительные числа. Причём $a^5+b^5+c^5=ab^2+bc^2+ca^2$.

Найдите наименьшее значение выражения: $\dfrac{1}{ab+bc+ca}\cdot\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}+\dfrac{b^2+c^2}{c}+\dfrac{c^2+a^2}{a}\right)$.

1. $$\frac{1}{ab+bc+ca}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{b}+\frac{b^2+c^2}{c}+\frac{c^2+a^2}{a}\right)=\frac{\left(\frac{a^2}{b}+b^5\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c^5\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a^5\right)-\left(a^5+b^5+c^5\right)+(a+b+c)}{ab+bc+ca}\geq$$

$$\geq\frac{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)-\left(a^5+b^5+c^5\right)+(a+b+c)}{ab+bc+ca}=\frac{a\left(b^2+1\right)+b\left(c^2+1\right)+c\left(a^2+1\right)}{ab+bc+ca}\geq\frac{2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=2.$$

2. Наименьшее значение 2 достигается при $a=b=c=1$.