Задача 18. Натуральное число будем называть *симметричным*, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке.
а) Будет ли симметричное число с чётным количеством цифр делиться на 11?
б) К трёхзначному числу припишем справа это же число. Будет ли полученное шестизначное число точным квадратом?
в) Какие шестизначные симметричные числа делятся на 77? Сколько всего таких чисел?

Решение. а) Рассмотрим симметричное число $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_n \ldots a_2 a_1}$, состоящее из $2n$ цифр. Тогда его десятичная запись имеет вид

$$n = a_1 \cdot 10^{2n-1} + a_2 \cdot 10^{2n-2} + \ldots + a_n \cdot 10^n + a_n \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

и

$$n \equiv a_1 \cdot (-1)^{2n-1} + a_2 \cdot (-1)^{2n-2} + \ldots + a_n \cdot (-1)^n + a_n \cdot (-1)^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot (-1) + a_1 \pmod{11},$$

то есть $n \equiv -a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n (a_n - a_n) + \ldots - a_2 + a_1 = 0 \pmod{11}$. Таким образом, симметричное число с чётным количеством цифр делится на 11.

б) Данное число имеет вид $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. Поскольку

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)(10^3 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc},$$

а $\overline{abc} \leqslant 999$, то $\overline{abcabc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$ не может быть точным квадратом.

в) Рассмотрим числа вида $\overline{abccba}$. Число будет делиться на 77, если оно делится на 7 и на 11. Так как числа указанного вида делятся на 11 (см. док-во пункта «а»), то достаточно рассмотреть делимость на 7. Десятичная запись чисел указанного вида имеет вид $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$, причём

$$\overline{abccba} \equiv a \cdot 3^5 + b \cdot 3^4 + c \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + b \cdot 3 + a \equiv c - a \pmod{7}.$$

Значит, чтобы числа вида $\overline{abccba}$ делились на 77, необходимо и достаточно, чтобы разность первой и третьей цифр делилась на 7. Определим количество таких чисел.

Если $a = c$, то цифру a можно выбрать девятью способами, цифру b — десятью способами, цифра c однозначно определяется по a, и существует $9 \cdot 10 = 90$ чисел. Если $a \neq c$, то при $a = 1$ имеем $c = 8$ и существует 10 чисел. Если $a = 2$, то $c = 9$ и имеем 10 чисел. При $a = 7$ возможно, что $c = 0$, и тогда найдётся еще 10 чисел. Если $a = 8$, то $c = 1$ и имеем ещё 10 чисел. Наконец, при $a = 9$ будет $c = 2$ и ещё 10 чисел. При $a = 3, 4, 5, 6$ не найдётся такая цифра c, что $a - c \equiv 0 \pmod{7}$. Итого 140 чисел.
Ответ: а) да; б) нет; в) разность первой и третьей цифр делится на 7; 140 чисел.