АлексЛарин-378, задача 18

Натуральное число будем называть симметричным, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке.
а) Будет ли симметричное число с чётным количеством цифр делиться на 11?
б) К трёхзначному числу припишем справа это же число. Будет ли полученное шестизначное число точным квадратом?
в) Какие шестизначные симметричные числа делятся на 77? Сколько всего таких чисел?

Решение

а) Да, т.к. в этом случае сумма цифр, стоящих на чётных местах будет совпадать с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Это частный случай признака делимости на 11.

б) Нет. Если $\overline{abc}$ – исходное трёхзначное число, то $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Числа 7, 11, 13 – простые и чтобы $\overline{abcabc}$ было точным квадратом необходимо, чтобы они были делителями числа $\overline{abc}$, но тогда было бы $\overline{abc} \geqslant 1001$, что невозможно.

в) Пусть $\overline{abccba}$ – шестизначное симметричное число. Оно всегда делится на 11. Рассмотрим его остаток при делении на 7:

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c \equiv 6a + c \equiv c - a \pmod 7$$

Следовательно, если $a \equiv c \pmod 7$, то $\overline{abccba} \vdots 7$, и более того, $\overline{abccba} \vdots 77$.

Выпишем подходящие пары a, c:

1 1	2 2	3 3	5 5	7 0	8 1	9 2
1 8	2 9	4 4	6 6	7 7	8 8	9 9

Итого, 14 пар. Цифра b для каждой пары может варьироваться от 0 до 9. Значит, всего шестизначных симметричных чисел, делящихся на 77 ровно 140.

Ответ: **а)** Да; **б)** Нет; **в)** 140.