12. А) Решите уравнение $2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\sqrt{6}\sin x$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$

Решение.

(а) Применим формулу косинуса разности аргументов, уравнение примет вид:

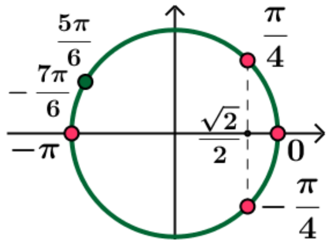
$$2\cdot\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\sqrt{6}\sin x \;\Leftrightarrow\; \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-\sqrt{6}\sin x=0 \;\Leftrightarrow$$

Применим формулу синуса двойного угла:

$$\Leftrightarrow\; 2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sqrt{6}\sin x=0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3}\sin x\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\sin x=0,\\ 2\cos x-\sqrt{2}=0;\end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x=\pi k,k\in\mathbb{Z},\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

(б) Отбор корней $\in\left[-\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ выполним с помощью числовой окружности:



$x_1=-\pi;\quad x_2=-\dfrac{\pi}{4};\quad x_3=0;\quad x_4=\dfrac{\pi}{4}.$

Ответ: (а) $\pi k,k\in\mathbb{Z};\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$ (б) $-\pi;\ -\dfrac{\pi}{4};0;\ \dfrac{\pi}{4}.$

14. Решите неравенство: $\dfrac{36^x-6^{x+1}+3}{6^x-5}+\dfrac{6^{x+1}-39}{6^x-7}\le 6^x+5$

Решение.

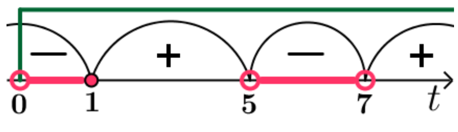
$$\frac{36^x-6^{x+1}+3}{6^x-5}+\frac{6^{x+1}-39}{6^x-7}\le 6^x+5 \;\Leftrightarrow\; \frac{(6^x)^2-6\cdot 6^x+3}{6^x-5}+\frac{6\cdot 6^x-39}{6^x-7}\le 6^x+5.$$

Пусть $6^x=t,t>0,$ неравенство примет вид:

$$\frac{t^2-6t+3}{t-5}+\frac{6t-39}{t-7}\le t+5 \;\Leftrightarrow\; \frac{t(t-5)-(t-5)-2}{t-5}+\frac{6(t-7)+3}{t-7}\le t+5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; t-1-\frac{2}{t-5}+6+\frac{3}{t-7}-t-5\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{t-7}-\frac{2}{t-5}\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3t-15-2t+14}{(t-7)(t-5)}\le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{t-1}{(t-7)(t-5)}\le 0;\quad t=1;\ \begin{cases}t\ne 7,\\ t\ne 5.\end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l}0<t\le 1,\\ 5<t<7.\end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x (функции $y=6^t$ и $y=\log_6 t$ — возрастающие; $6^t>0$ при $\forall t$):

$$\left[\begin{array}{l}0<6^x\le 1,\\ 5<6^x<7;\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}6^x\le 6^0,\\ \log_6 5<\log_6 6^x<\log_6 7;\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ \log_6 5<x<\log_6 7.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0]\cup(\log_6 5;\ \log_6 7).$