17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$

Решение.

Разложим подкоренное выражение на множители:

$x^2-4x+4a-a^2=(x-a)(x+a)-4(x-a)=(x-a)(x+a-4)$.

Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases}\log_4(2x-1)=0,\\(x-a)(x+a-4)\geq 0;\end{cases}$ (1) или $\begin{cases}\sqrt{(x-a)(x+a-4)}=0,\\2x-1>0.\end{cases}$ (2)

(1) $\begin{cases}\log_4(2x-1)=0,\\(x-a)(x+a-4)\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=1,\\(x-a)(x+a-4)\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\(1-a)(a-3)\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\(a-1)(a-3)\leq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\1\leq a\leq 3.\end{cases}$

Так как $1\in[0;2]$, то исходное уравнение имеет на этом отрезке корень $x_1=1$ при $1\leq a\leq 3$.

(2) $\begin{cases}\sqrt{(x-a)(x+a-4)}=0,\\2x-1>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)(x+a-4)=0,\\2x>1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-a=0,\\x+a-4=0,\end{array}\right.\\x>0{,}5;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\x=4-a,\end{array}\right.\\x>0{,}5;\end{cases}$

Исходное уравнение имеет на $[0;2]$ корень $x_2=a$, если выполняются следующие условия:

$\begin{cases}a>0{,}5,\\0\leq a\leq 2;\end{cases}\Leftrightarrow 0{,}5<a\leq 2$.

Исходное уравнение имеет на $[0;2]$ корень $x_3=4-a$, если выполняются следующие условия:

$\begin{cases}4-a>0{,}5,\\0\leq 4-a\leq 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a>-3{,}5,\\-4\leq -a\leq -2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<3{,}5,\\2\leq a\leq 4;\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq a<3{,}5$.

Найдём значения параметра a, при которых корни уравнения совпадают:

$x_2=x_1$ при $a=1$; $x_3=x_1$ при $4-a=1\Leftrightarrow a=3$; $x_2=x_3$ при $a=4-a\Leftrightarrow 2a=4\Leftrightarrow a=2$.

Все полученные результаты сведём в таблицу значений a (заметим, что при $\left[\begin{array}{l}a\leq 0{,}5,\\a\geq 3{,}5;\end{array}\right.$ уравнение не имеет корней на отрезке $[0;2]$):

a	$(0{,}5;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;3{,}5)$
$x_1=1$	–	+	+	+	+	+	–
$x_2=a$	+	+	+	+	–	–	–
$x_3=4-a$	–	–	–	+	+	+	+
Совпадение корней		$x_2=x_1$		$x_2=x_3$		$x_3=x_1$	
Количество корней	1	1	2	2	2	1	1

Таким образом, условие задачи выполняется при $a\in(0{,}5;1]\cup[3;3{,}5)$.

Ответ: $a\in(0{,}5;1]\cup[3;3{,}5)$.