№12, вар. 378.

12. А) Решите уравнение $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\sqrt{6}\sin x$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

Решение.

А) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\sqrt{6}\cdot\sin x$.

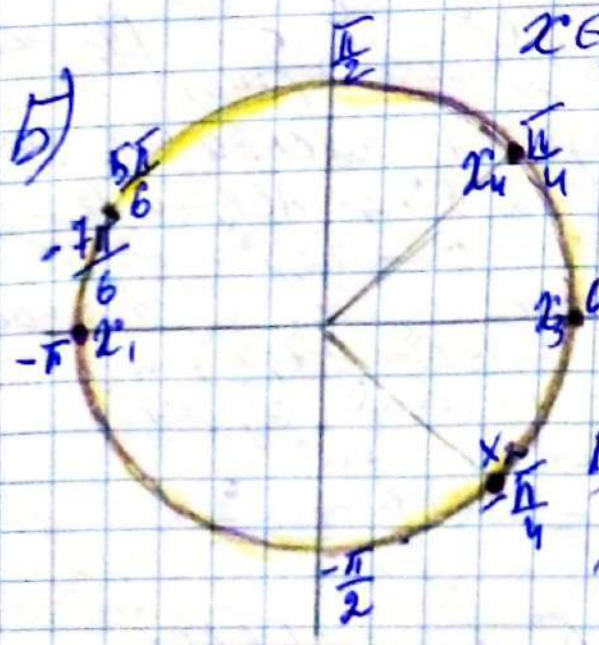
$2\left(\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\sqrt{6}\cdot\sin x$,

$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-\sqrt{6}\cdot\sin x=0$.

$\sqrt{3}\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$; $\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.$, $n,k\in Z$ (см.)

$x\in\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

Б)



$x=\pi n$: $x=0$ $(n=0)$, $x=-\pi$ $(n=-1)$;

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$: $x=-\frac{\pi}{4}$ $(k=-1)$

$x=\frac{\pi}{4}$ $(k=1)$.

Ответ: А) πn, $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $n,k\in Z$;

Б) отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ принадлежат четыре корня: $-\pi$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$.

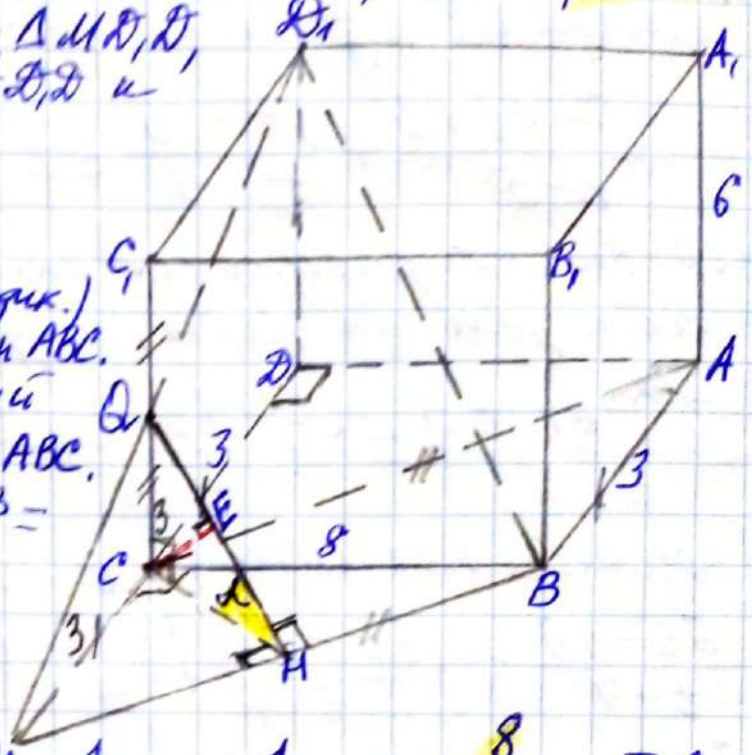
13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $BC=8$, $CD=3$, $BB_1=6$. Точка Q – середина ребра CC_1

А) Докажите, что угол между плоскостями BD_1Q и ABC равен $\arccos\frac{8}{\sqrt{137}}$

Б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BD_1Q

№13, вар. 378.

Геометрическое решение.



Решение. А) QC – ср. линия ΔMD_1D, т.к. Q – сред. $CC_1 \Rightarrow QC=3=\frac{1}{2}D_1D$ и $QC \parallel DD_1 \Rightarrow CM=CD=3$.
В прямоуг. ΔMCB проведём высоту CH, $CH=пр_{\mu ABC} QH \Rightarrow$ $QH \perp MB$ (т-ма о 3-х перпендик.)
MB – линия пересеч. пл-й BD_1Q и ABC.
След., $\angle QHC=\alpha$ – линейный угол двугр. угла между BD_1Q и ABC.
$\cos\alpha$ – ?
Из ΔMCB: $CH=\frac{MC\cdot CB}{MB}=$
$=\frac{3\cdot 8}{\sqrt{3^2+8^2}}=\frac{24}{\sqrt{9+64}}=\frac{24}{\sqrt{73}}$
Из ΔQCH: $tg\alpha=\frac{QC}{CH}$,
$tg\alpha=\frac{3}{24/\sqrt{73}}=\frac{\sqrt{73}}{8} \Rightarrow \cos\alpha \overset{M}{=} \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{73}{64}}}=\frac{8}{\sqrt{137}}$, т.е.
$\alpha=\arccos\frac{8}{\sqrt{137}}$, ч.т.д.

Б) 4-х угольник $MCAB$ – парал-м, т.к. $MC \parallel AB$ и $MC=AB=3 \Rightarrow$
$AC \parallel MB$, $MB \subset BD_1Q \Rightarrow AC \parallel$ пл. BD_1Q (признак $\parallel$ пр-ых).
$\Rightarrow \rho(A, пл.BD_1Q)=\rho(C, пл.BD_1Q)$. Пл. BD_1Q проходит через пр. MB. $MB \perp CH, QH \Rightarrow MB \perp$ пл. QCH.
По признаку $\perp$ пл-тей пл-ти BD_1Q и QCH перпендикул.
$\Rightarrow \rho(C, BD_1Q)=$ высоте ΔQCH, провед. к гипот. $QH \subset QCH$.
Т.е., $\rho(A, BD_1Q)=\rho(C, BD_1Q)=CE=\frac{CQ\cdot CH}{QH}=\frac{3\cdot 24}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{(3)^2+\left(\frac{24}{\sqrt{73}}\right)^2}}$
$=\frac{3\cdot 24}{\sqrt{9\cdot 73+9\cdot 64}}=\frac{24}{\sqrt{73+64}}=\frac{24}{\sqrt{137}}$.

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{137}}$.

№13. Координатный способ решения.

Система координат $Cxyz$. Пл-ть BD_1Q пересекает оси коорд. в т-ках M, B, Q, т.е., отсекает на осях коорд. отрезки $a=3$, $b=8$, $c=3$.

Т. $C(0;0;0)$ – начало коорд., Т. $A(-3;8;0)$.

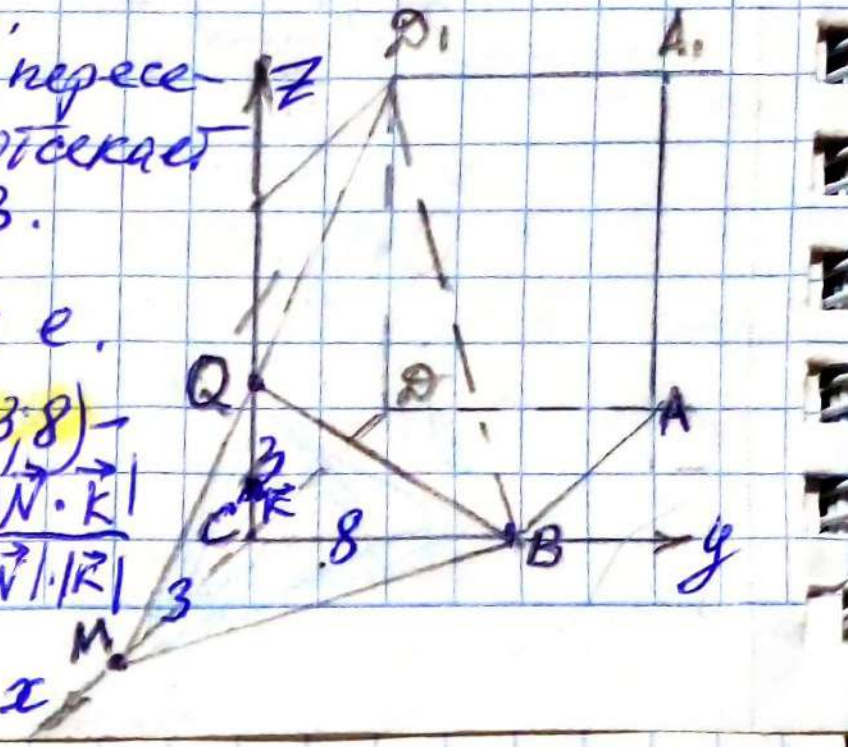
Ур-ние пл. BD_1Q: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (в отрезках), т. е.

$\frac{x}{3}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1 \mid \cdot 24$; $8x+3y+8z-24=0$. $\vec{N}=(8;3;8)$ – нормальный вектор пл. (BD_1Q)

A) $\cos(BD_1Q, ABC)=\frac{|\vec{N}\cdot\vec{k}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{k}|}$

$\vec{k}$ – норм. вектор пл. ABC, $\vec{k}=(0;0;1)$, $|\vec{k}|=1$

$\cos\alpha=\frac{|8\cdot 0+3\cdot 0+8\cdot 1|}{\sqrt{8^2+3^2+8^2}\cdot 1}=\frac{8}{\sqrt{137}}$, т.т.д. ($\vec{k}$ – ед. вектор (орт оси Oz))



Б) $\rho(A, BD_1Q)$ – ? $\rho(A, BD_1Q)=\frac{|8\cdot(-3)+3\cdot 8+8\cdot 0-24|}{\sqrt{8^2+3^2+8^2}}=\frac{24}{\sqrt{137}}$.

$A(-3;8;0)$, ур. пл. $8x+3y+8z-24=0$.

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{137}}$

P.S. Воспользовались формулой – расст. от $T.M(x_0;y_0;z_0)$ до пл. β, заданной ур-нием $ax+by+cz+d=0$:

$\rho(M, пл.\beta)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.