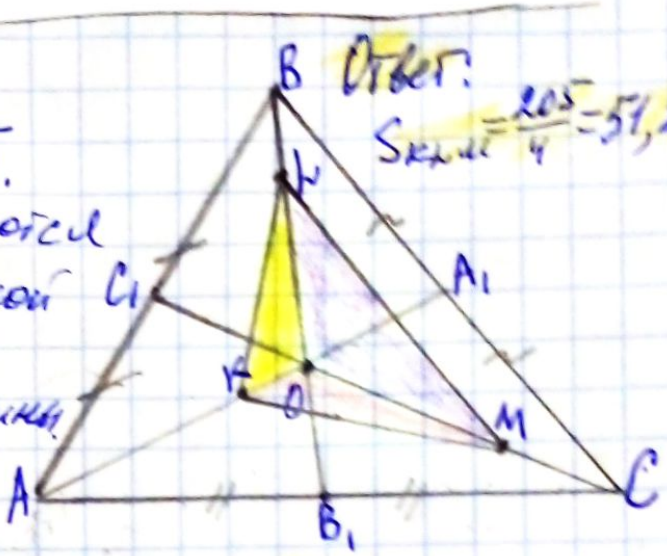
№16, вар. 378.

16. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Точки K, L, M принадлежат отрезкам AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно, причем $AK=KA_1$, $BL:LB_1=1:4$, $CM:MC_1=1:3$. Площадь треугольника ABC равна 200.

А) Докажите, что $OL:BB_1=7:15$

Б) Найдите площадь треугольника KLM



Ответ: $S_{KLM}=\frac{205}{4}=51{,}25$.

Решение.

А) Док-ть, что $OL:BB_1=7:15$.

Медианы тр-ка пересекаются в одной точке и этой точкой делятся в отношении 2:1, если считать от вершины. Следоват., $BO=\frac{2}{3}BB_1$.

По условию $BL:LB_1=1:4 \Rightarrow$

$BL=\frac{1}{5}BB_1$; $LO=BO-BL=\frac{2}{3}BB_1-\frac{1}{5}BB_1=\frac{7}{15}BB_1 \Rightarrow LO:BB_1=7:15$, ч.т.д.

Б) Медианы тр-ка, пересекаясь, делят его на 3 равновеликих тр-ка, основаниями которых явл. стороны данного тр-ка. Т.е., $S_{AOC}=S_{AOB}=S_{COB}$. Действительно

$S_{AOC}:S_{AOC_1}=CO:OC_1=2:1 \Rightarrow S_{AOC}=2S_{AOC_1}=S_{ACB}$, т.к. $AC_1=BC_1$

Аналогично получим, что $S_{AOC}=S_{COB}$.

Следоват., $S_{AOC}=S_{AOB}=S_{COB}=\frac{200}{3}$

В п. А) мы получили, что $LO=\frac{7}{15}BB_1$. Так же найдём OK и OM;

$OK=AO-AK=\frac{2}{3}AA_1-\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{6}AA_1$;

$OM=CO-CM=\frac{2}{3}CC_1-\frac{1}{4}CC_1=\frac{5}{12}CC_1$. Площади тр-в, имеющих общую вершину, относятся как произведения их сторон, содержащих эту вершину, т.е.:

$\frac{S_{KOM}}{S_{AOC}}=\frac{OK\cdot OM}{OA\cdot OC}=\frac{\frac{1}{6}AA_1\cdot\frac{5}{12}CC_1}{\frac{2}{3}AA_1\cdot\frac{2}{3}CC_1}=\frac{5}{32}$

$\frac{S_{OLK}}{S_{AOB}}=\frac{OL\cdot OK}{AO\cdot OB}=\frac{\frac{7}{15}BB_1\cdot\frac{1}{6}AA_1}{\frac{2}{3}AA_1\cdot\frac{2}{3}BB_1}=\frac{7}{40}$

$\frac{S_{OLM}}{S_{BOC}}=\frac{OL\cdot OM}{BO\cdot OC}=\frac{\frac{7}{15}BB_1\cdot\frac{5}{12}CC_1}{\frac{2}{3}BB_1\cdot\frac{2}{3}CC_1}=\frac{7}{16}$

$S_{KLM}=S_{KOM}+S_{OLK}+S_{OLM}=$

$=\left(\frac{5}{32}+\frac{7}{40}+\frac{7}{16}\right)\cdot\frac{200}{3}=$

$=\frac{25+35+70}{160}\cdot\frac{200}{3}=\frac{123}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{205}{4}$.