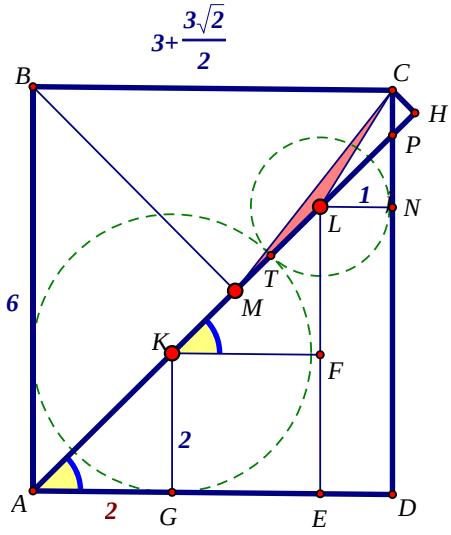
№16 вариант 389.

16. В прямоугольнике ABCD, в котором $AD = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а AB = 6, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, радиус которой равен 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, радиус которой равен 1, касается стороны CD и первой окружности.

а) Докажите, что точки A, K и L лежат на одной прямой.

б) Найдите площадь треугольника CLM, если M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.



Решение.

а)Окружность с центром K касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$, следов., AK – биссектриса $\angle BAD$ и $\angle KAD = 45°$.

T – точка касания окружностей и точки K, T, L лежат на одной прямой. $KL = KT + TL = 3$;

$KF = GE = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $cos\angle LKF = \frac{KF}{KL} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\angle LKF = 45° = \angle KAD = 45°$.

А так как $KF \parallel AD$, то точки A, K и L лежат на одной прямой.

б)CH – высота ΔCLM и $S_{\Delta CLM} = \frac{1}{2} ML \cdot CH$; $BM \perp AL, \angle BAL = 45°$, следов., ΔAMB – прямоуг., равнобедренный и $AM = BM = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. Из прямоуг., равнобедренного ΔAGK $AK = 2\sqrt{2}$.

$ML = AL - AM = AK + KL - AM = 2\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$.

ΔCHP прямоуг., равноб., т. к. $\angle CPH = \angle APD = \angle PAD = 45°$, следов., $CH = \frac{CP}{\sqrt{2}}$.

$CP = CD - DP = 6 - 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2}$ и $CH = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2}$.

$S_{\Delta CLM} = \frac{1}{2} ML \cdot CH = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{2}) \cdot \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{4}$.

Ответ: б) $\mathbf{\frac{12\sqrt{2} - 15}{4}}$.