№13. Решите в действительных числах неравенство (здесь $\sqrt[3]{-125} = -5$): $\frac{x^9-81x-62}{x^3} \le 18 \cdot \sqrt[3]{3x+2}$.

Решение:

1. Обозначим $f(x) = \frac{x^3-2}{3}$ (функция $y = f(x)$ – возрастающая функция), тогда $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x+2}$ (функция $y = f^{-1}(x)$ – функция обратная функции $y = f(x)$).

2. $\frac{x^9-81x-62}{x^3} \le 18 \cdot \sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3}\cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{3x+2} - (3x+2)}{x^3} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x^3-2}{3}\right)^3 + 3\cdot\frac{x^3}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x^3-2}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{3x+2} - (3x+2)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{f^3 - g^3 + \frac{2}{3}\cdot x^3 \cdot (f-g)}{x} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(f-g)\left(f^2+fg+g^2+\frac{2}{3}\cdot x^3\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(f-g)\left(f^2+fg+g^2+2f+\frac{4}{3}\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(f-g)\left(f^2+f(g+2)+g^2+\frac{4}{3}\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(f-g)\left((2f+g+2)^2+3\left(g-\frac{2}{3}\right)^2\right)}{4x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{f-g}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{f(f(x))-f\left(f^{-1}(x)\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{f(f(x))-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1\} \cup (0;\ 2]$.