

TVOL 349-1 (22)

Условие

Постройте график функции:

$$y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right).$$

Определите, при каких значениях a прямая $y = ax + 1$ имеет с графиком функции нечётное количество общих точек.

Решение

На множестве вещественных значений $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(0, \frac{7}{2}\right)$ функция примет вид $y = \frac{7}{2x}$.

На множестве вещественных значений $x \in \left[-\frac{7}{2}, 0\right) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$ функция примет вид $y = \frac{2x}{7}$.

Построим график функции (см. рис. 1).

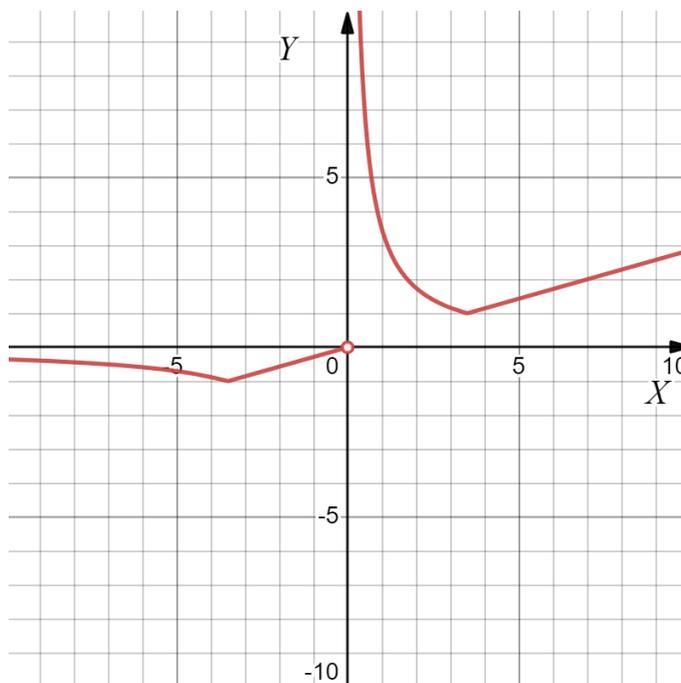


Рис. 1 – График функции $y = x|x| - |x| - 5x$

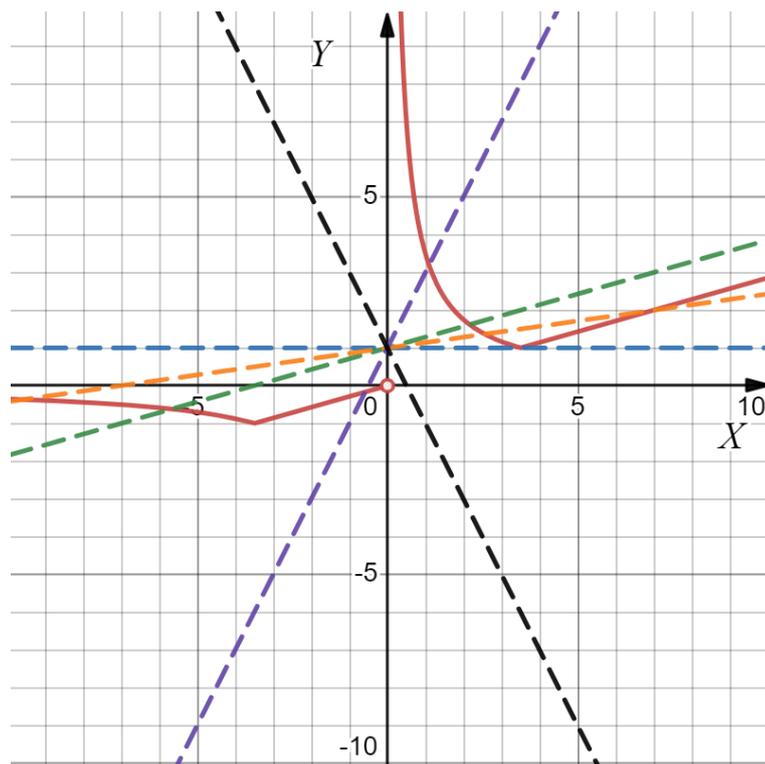


Рис. 2 – График функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$ вместе с прямыми $y = ax + 1$ при различных значениях a

Пусть ν – количество общих точек графика функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$ и прямой $y = ax + 1$.

Из графиков на рис. 2 (см. выше) видно, что:

при $a \in (-\infty, 0)$ имеем $\nu = 0$ (чёрная прямая).

при $a \in \{0\}$ имеем $\nu = 1$ (синяя прямая).

при $a \in \left(0, \frac{2}{7}\right)$ имеем $\nu = 3$ (оранжевая прямая).

при $a \in \left\{\frac{2}{7}\right\}$ имеем $\nu = 2$ (зелёная прямая).

при $a \in \left(\frac{2}{7}, +\infty\right)$ имеем $\nu = 2$ (фиолетовая прямая).

Итак, прямая $y = ax + 1$ имеет с графиком функции нечётное количество общих точек при

$$a \in \left[0, \frac{2}{7}\right).$$

Ответ: $\left[0, \frac{2}{7}\right)$.